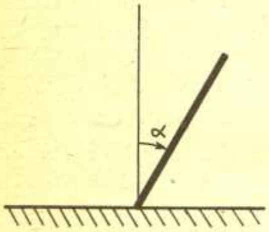
Zadania z fizyki nr 3, 4

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



3. Cienki, sztywny, jednorodny pręt, stojący pionowo na idealnie gładkim, poziomym podłożu, zostaje minimalnie wychylony z położenia równowagi i puszczony. Obliczyć przyspieszenie kątowe pręta jako funkcję kąta α (rysunek) podczas jego upadku. Jaki tor zakreśli środek masy pręta? Czy pręt, jeśli będzie dostatecznie kruchy, może ulec złamaniu, zanim upadnie na podłoże? Jaki będzie ruch pręta po idealnie sprężystym zderzeniu z podłożem?

4. Do wykrywania i lokalizacji zanurzonych okrętów podwodnych używany jest sonar, w którym wykorzystuje się odbicie fali akustycznej od powierzchni okrętu. Okazuje się, że w wodach tropikalnych zasięg sonaru, niezależnie od mocy i czułości urządzeń, jest często ograniczony do odległości zaledwie 1 km. Wyjaśnić to zjawisko.

Można inaczej

Oto inny niż można znaleźć w podręcznikach sposób obliczenia $\lim \sqrt[n]{n}$. Korzysta się z tego, iż ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny oraz z tego, iż podciąg ciągu zbieżnego ma tę samą granicę co cały ciąg.

Ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest ograniczony z dołu (oczywiste) i malejący (dowód indukcyjny poniżej), a więc zbieżny do pewnej liczby g.

Podciąg wyrazów o parzystych indeksach $(\sqrt[2n]{2n})_{n=2}^{\infty}$ ma tę samą granicę g. Ale

$$\sqrt[2n]{2n} = \sqrt{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}.$$

Ciąg po prawej stronie ma granicę g, ciąg po lewej granicę $\sqrt{1\cdot g}$ (tu trzeba wiedzieć dodatkowo, że $\lim\sqrt[n]{2} = 1$, można to też uprzednio udowodnić powyższą metodą). Tak więc

$$g = \sqrt{g},$$

czyli $g = 0$ lub $g = 1$. Wszystkie wyrazy naszego ciągu są jednak większe niż 1, a więc pozostaje tylko możliwość $g = 1$.

Mamy pokazać jeszcze, że ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest monotoniczny. Nierówność $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ jest równoważna nierówności $n^{n+1} > (n+1)^n$.

a ta z kolei $n > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Dla $n = 3$ mamy oczywiście $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} < 3$.

Jeśli teraz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < n$, to

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1,$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego, a zarazem monotoniczności naszego ciągu.

Rozwiązanie zadania F 166. Śmigłowiec utrzymuje się nad ziemią dzięki odrzucanemu w dół strumieniowi powietrza. W czasie Δt śmigło odrzuca w dół powietrze zawarte w objętości $Sv\Delta t$, gdzie S — powierzchnia zakreślana przez śmigło, a v — prędkość strumienia powietrza. Zmiana pędu powietrza o gęstości d wynosi $\Delta p = d\cdot S\cdot v^2\cdot\Delta t$. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na śmigłowiec działa więc siła

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = dSv^2.$$

Siła F musi równoważyć siłę ciężkości Mg (M — masa śmigłowca), a więc $Mg = dSv^2$, otrzymujemy stąd:

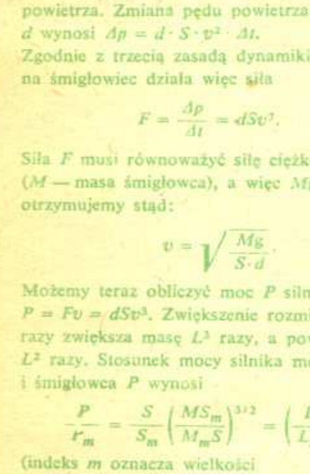
$$v = \sqrt{\frac{Mg}{S\cdot d}}.$$

Możemy teraz obliczyć moc P silnika: $P = Fv = dSv^3$. Zwiększenie rozmiarów L razy zwiększa masę L^3 razy, a powierzchnię L^2 razy. Stosunek mocy silnika modelu P_m i śmigłowca P wynosi

$$\frac{P}{P_m} = \frac{S}{S_m}\left(\frac{MS_m}{M_mS}\right)^{3/2} = \left(\frac{L}{L_m}\right)^{7/2}$$

(indeks m oznacza wielkości charakteryzujące model). Dla wartości podanych w zadaniu $P = 30\ \mathrm{W}\cdot 10^{7/2} \approx 9{,}5\cdot 10^4\ \mathrm{W}$.

Łuki Talesa



jest to miejsce geometryczne punktów, z których widać dany odcinek pod danym kątem. Są to dwa łuki okręgów symetryczne względem danego odcinka. Jeden z nich znajduje się tak:

Odkładamy dany kąt α tak, by jednym z jego ramion był dany odcinek AB. Przez wierzchołek kąta prowadzimy prostopadłą do drugiego ramienia. Z punktu przecięcia tej prostopadłej z symetralną odcinka AB zakreślamy okrąg przechodzący przez A. Gdy $\alpha < 90°$, rozwiązaniem jest większy z łuków, na jakie punkty A, B dzielą okrąg, gdy $\alpha > 90°$ — mniejszy.

Chyba każdy z Czytelników z łatwością uzasadni poprawność tej konstrukcji.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 8/1984

Piotr Figurny	- Lubartów	43,78pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	42,10pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	40,48pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia G.	38,92pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	38,22pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	37,50pkt

Współczynniki trudności zadań 88, 89, 90:
2,56 3,67 2,30

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: WT = $4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Zadania z matematyki nr 105, 106

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1985

105. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1^3+ \ldots +x_n^3 \leqslant 1/n$. Dowieść, że zachodzi nierówność $(x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+ \ldots +nx_n^2)^3 \leqslant (n+1)^2/4$.

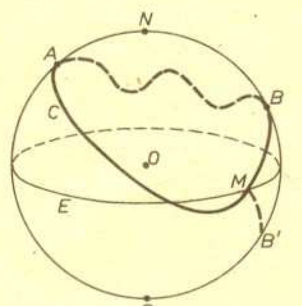
106. Prostopadłościan o wymiarach całkowitych a, b, c podzielono na sześciany jednostkowe. Ile spośród tych sześcianów ma wspólne punkty wewnętrzne z jedną (ustaloną) przekątną prostopadłościanu?
Zadanie **106** przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z numeru 10/1984

Przypominamy treść zadań:

94. W przestrzeni dane są półproste $\overrightarrow{OP_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Sigma|\sphericalangle P_iOP_{i+1}| < 360°$ $(P_{n+1} = P_1)$. Dowieść, że istnieje półprzestrzeń zawierająca te półproste.
95. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań: $x_ix_{i+1} = 2^i$ $(i = 1, \ldots, n;\ x_{n+1} = x_1)$.
96. Czy istnieje ciąg liczb naturalnych (a_n) taki, że:
a) $\lim s(a_n)/s(2a_n) = \infty$, b) $\lim s(a_n)/s(3a_n) = \infty$? ($s(k)$ oznacza sumę cyfr liczby k).

94. Można założyć, że P_i są punktami leżącymi w odległości 1 od punktu O. Łącząc każdy punkt P_i z punktem P_{i+1} łukiem koła wielkiego otrzymujemy krzywą zamkniętą na sferze o środku O i promieniu 1. Zgodnie z warunkiem zadania krzywa ta ma długość mniejszą od 2π. Pokażemy, że każda krzywa zamknięta C na sferze jednostkowej (niekoniecznie złożona z łuków okręgów), o długości $< 2\pi$, jest zawarta w pewnej półsferze. Stąd już wyniknie teza zadania. Niech A, B będą punktami połowiącymi długość krzywej C. Środek krótszego z dwóch łuków koła wielkiego przechodzącego przez A i B oznaczmy przez N, a środek dłuższego z tych łuków przez S. Niech E będzie okręgiem wielkim w płaszczyźnie prostopadłej do średnicy $\overline{NS}$ (rysunek). Przypuśćmy, że krzywa C ma punkt M wspólny z E. Część krzywej C zawartą między M i B odbijamy



symetrycznie względem płaszczyzny okręgu E; obraz B' punktu B jest punktem antypodycznym do A. Droga z A do M wzdłuż C i dalej z M do B' wzdłuż obrazu symetrycznego C ma długość równą połowie długości C, jest więc krótsza od π, a to jest niemożliwe, bo $\overline{AB'}$ jest średnicą. Przypuszczenie, że C przecina E, okazuje się fałszywe. Zatem krzywa C leży w całości po jednej stronie koła wielkiego E.

95. Mnożymy wszystkie równania stronami. Dostajemy: $p^2 = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}$, gdzie $p = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Następnie mnożymy stronami równania $x_ix_{i+1} = 2^i$ dla $i = 2, 4, 6, \ldots, 2k$, gdzie $k = [n/2]$. Dostajemy: $(x_2x_3)(x_4x_5) \ldots (x_2\ x_{2k+1}) = 2^2 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2k} = 2^{k(k+1)}$. Gdy n jest parzyste, $n = 2k$, lewa strona otrzymanego równania (oznaczmy ją przez L) równa się p, więc $p^2 = 2^{2k(k+1)}$, co jest sprzeczne z wcześniej otrzymanym wzorem na p^2. Układ nie ma rozwiązań. Gdy n jest nieparzyste, $n = 2k+1$, wówczas $L = p/x_1$, dostajemy więc $p^2 = (2^{k(k+1)}x_1)^2$, co po porównaniu z wcześniejszym wzorem $p^2 = 2^{n(n+1)/2} = 2^{(k+1)(2k+1)}$ daje $x_1 = 2^{(k+1)/2}$. Wartość pozostałych x_i wyznaczamy z kolejnych równań układu: $x_{2j+1} = 2^{(2j+k+1)/2}$, $x_{2j} = 2^{(2j-k-1)/2}$, $j = 1, \ldots, k$, i sprawdzamy, że te liczby istotnie spełniają dany układ równań.

96. a) Przypuśćmy, że zapis dziesiętny liczby k składa się z i_0 zer, i_1 jedynek, i_2 dwójek, ..., i_9 dziewiątek. W liczbie $2k$ w miejscu cyfr 0, 1, 2, 3, 4, a także w miejscu cyfr 5, 6, 7, 8, 9, pojawią się odpowiednio cyfry 0, 2, 4, 6, 8, ewentualnie zwiększone o 1 z przeniesienia dziesiętnego przy mnożeniu poprzedniej cyfry, gdy jest ona $\geqslant 5$. Zatem dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność

$$s(2k) = (i_0+i_5)\cdot 0+(i_1+i_6)\cdot 2+(i_2+i_7)\cdot 4+(i_3+i_8)\cdot 6+$$
$$+(i_4+i_9)\cdot 8+(i_5+i_6+i_7+i_8+i_9) \geqslant$$
$$\geqslant (i_1+2i_2+ \ldots +5i_5+ \ldots +9i_9)/5 = s(k)/5,$$

więc ciąg spełniający warunek a) nie istnieje.
b) Warunek ten spełnia na przykład ciąg $a_n = (10^n+2)/3$, bo $s(a_n) = 3n+1$, $s(3a_n) = 3$.