energii w postaci zaproponowanej przez Kołmogorowa $E(k) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$.

Niech v_n będzie charakterystyczną prędkością cząstek płynu w wirach rzędu n (w układzie odniesienia, w których wir spoczywa). Energia kinetyczna na jednostkę objętości niesiona przez te wiry ma postać

$$E_n \sim \beta^n v_n^2. \tag{1}$$

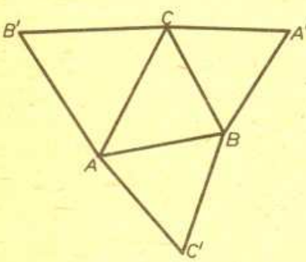
Załóżmy, że w czasie jednego „obrotu" wiru rzędu n przekazuje on znaczną część swojej energii wirom rzędu $n+1$. „Okres obrotu" wiru $t_n \sim \frac{l_n}{v_n}$, a więc szybkość przepływu energii od wirów rzędu n do wirów rzędu $n+1$ będzie określona przez $\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$. Z definicji obszaru inercjalnego wynika, że szybkość przepływu energii ε_n jest równa szybkości ε, z jaką energia jest wprowadzana do układu. Mamy więc $\varepsilon_n \sim \varepsilon \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$, a stąd $v_n \sim \varepsilon^{1/3} l_n^{1/3} \beta^{-n/3}$.
Po podstawieniu do (1)

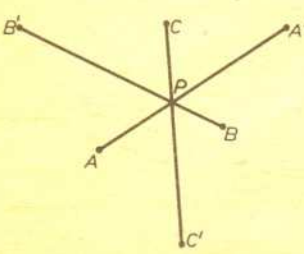
$$E_n \sim \varepsilon^{2/3} l_n^{2/3} \beta^{n/3} \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} \beta^{n/3}. \tag{2}$$

Ale $\beta = \frac{N}{2^3}$, $N = 2^D$, więc $\beta = 2^{D-3}$ i $\beta^{\frac{n}{3}} = (2^n)^{\frac{D-3}{3}} = \left(\frac{2^n}{l_0} l_0\right)^{\frac{D-3}{3}} = (k_n l_0)^{\frac{D-3}{3}}$.
Po podstawieniu do (2) otrzymujemy: $E_n \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} (k_n l_0)^{-1/3(3-D)}$.
E_n wiąże się z widmem energii $E(k)$ zależnością $E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k)\,dk$, czyli $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (k l_0)^{-1/3(3-D)}$.

Taką postać widma dla turbulencji jednorodnej w całej przestrzeni można otrzymać posługując się wyłącznie argumentami wymiarowymi — jedyną funkcją ε i k, która ma wymiar $E(k)$, jest $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Okazuje się, że przy odpowiednio intensywnym mieszaniu w widmach otrzymanych z doświadczeń rzeczywiście występuje obszar potęgowej zależności od k (co potwierdza słuszność przyjętego modelu przepływu energii) z wykładnikiem mniejszym od $-5/3$ (co potwierdza hipotezę Mandelbrota). Dane doświadczalne dają $\mu \simeq 0{,}5$, czyli wymiar fraktala $D \simeq 2{,}5$.

Jak widać, poprawka do rezultatu Kołmogorowa nie jest duża. Na szczęście współczynnik μ pojawia się również w innych charakterystykach turbulencji, które znacznie lepiej rozróżniają turbulencję wypełniającą całą przestrzeń od turbulencji na fraktalu. Pomiary i tym razem potwierdzają niesprzeczność hipotezy Mandelbrota. Zgodność wyników otrzymanych w różnych sytuacjach eksperymentalnych pokazuje również, że wymiar fraktala nie zależy od sposobu, w jaki został wygenerowany (np. nie zależy od intensywności mieszania), tzn. jest uniwersalną wielkością charakteryzującą turbulencję izotropową.





Czytelnicy proponują

Nasz Czytelnik Zbigniew Czesak z Krakowa zadał nam następujące pytanie:

Do trójkąta ABC dopisano trzy trójkąty równoboczne ABC', $AB'C$ i $A'BC$ jak na rysunku. Czy znając tylko punkty A', B', C', można znaleźć punkty A, B, C?

Można. Najpierw znajdujemy punkt P, z którego widać każdy z odcinków $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ pod kątem 120°, a następnie na każdej z półprostych $A'P$, $B'P$ i $C'P$ odłożyć odcinek o długości $\frac{1}{2}(A'P+B'P+C'P)$. Końce tych odcinków to szukane punkty A, B i C.

Powstają dwa pytania. Po pierwsze — jak znaleźć punkt P (i kiedy go znaleźć można)? Tu należy posłużyć się łukami Talesa (piszemy o nich w numerze). Po drugie — skąd wiadomo, że proponowana konstrukcja jest poprawna? W tym pomaga rozwiązanie problemu Fermata (też podane w numerze).