Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału. Oto regulamin:

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki na posiedzeniu dn. 25.08.1984 we Wrocławiu, obradując w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, prof. dr Wojciech Żakowski dr Alicja Derkowska, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, dr Marek Kordos, dr Wacław Wierzbicki — przedstawiciel MOiW, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i przebieg obrony postanowiło przyznać:

Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem zamieścimy w numerze 3/1985.

1. Złoty medal i nagrodę w wysokości zł 7.000,— Michałowi Wojciechowskiemu z XIV LO w Warszawie za pracę ,,O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych",

2. Srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 4.500,— Bogdanowi Pelcowi z LO w Mikołowie za pracę ,,Zastosowanie kongruencji do znajdywania cech podzielności w dowolnym układzie liczbowym",

3. Brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 4.500,— Joannie Karmowskiej z XX LO w Krakowie za pracę ,,Potęgowanie macierzy czwórników",

4. Dyplom uczestnictwa w finale Markowi Strzempowiczowi z II LO w Dąbrowie Górniczej,

5. Nagrody w wysokości zł 3.000,— każda, opiekunom prac zakwalifikowanych do finału: dr Jerzemu Bednarczukowi, mgr Józefowi Siwemu, mgr Wojciechowi Karmowskiemu i mgr Marii Mizgale.

Zwycięzca konkursu w karykaturze przewodniczącego Jury.

Za co przyznany został srebrny medal w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki

Cechami podzielności nazwijmy twierdzenia postaci:
Dana jest liczba naturalna $L = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$, gdzie $a_n, \ldots, a_0$ to cyfry z danego układu pozycyjnego. Liczba p dzieli liczbę L wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli liczbę

$$Z = l_0 \cdot a_0 + l_1 \cdot a_1 + \ldots + l_{n-1} \cdot a_{n-1} + l_n \cdot a_n,$$

gdzie $l_0, \ldots, l_n$ są ustalonymi liczbami całkowitymi.

Zatem znalezienie konkretnej cechy podzielności polega na znalezieniu współczynników $l_0, \ldots, l_n$. Cecha jest tym lepsza, im mniejsze są te współczynniki.

Na przykład w układzie dziesiętnym cecha podzielności przez 3 (i przez 9) dana jest przez $l_0 = l_1 = \ldots = l_{n-1} = l_n = 1$, a powiedzmy przez 10 — przez $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$.

Zdobywca srebrnego medalu, Bogdan Pelc z Mikołowa, podał w swojej pracy twierdzenie wyznaczające **wszystkie cechy podzielności**, w dowolnym układzie pozycyjnym i przez dowolną liczbę. Oto jego wynik:

Oznaczmy przez $L_A = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$ liczbę zapisaną w układzie pozycyjnym o podstawie A. Niech ponadto

k_i oznacza resztę z dzielenia A^i przez p,

k_r — resztę, która się pierwsza powtórzy w ciągu (k_i), lub pierwszą resztę równą zero.

Zauważmy, że elementy ciągu (k_i) są liczbami mniejszymi od p, a więc powtórzenie bądź pojawienie się zera wystąpi najpóźniej dla k_p.

Utwórzmy teraz liczbę Z_{L_A}. Niech

$$Z_{L_A} = a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_{r-1} a_{r-1} + \\ + k_1 a_r + k_2 a_{r+1} + \ldots + k_{r-1} a_{2r-2} + \\ + k_1 a_{2r-1} + \ldots + k_m a_n$$

(liczba m powstanie z liczb r i n) w przypadku, gdy $k_r \neq 0$ lub

$$Z_{L_A} = a_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_{r-1} a_{r-1}$$

w przeciwnym przypadku.

Twierdzenie. Liczba L_A dzieli się przez p wtedy i tylko wtedy, gdy Z_{L_A} dzieli się przez p.

Przykład (proszę pamiętać, że liczbę p, jak też liczbę Z_{L_A} przedstawia się zawsze w systemie dziesiętnym): szukamy cechy podzielności przez 3 liczb zapisanych w układzie piątkowym. Liczymy

$$k_1 = \text{reszta z dzielenia } 5^1 \text{ przez } 3 = 2,$$
$$k_2 = \text{reszta z dzielenia } 5^2 \text{ przez } 3 = 1,$$
$$k_3 = \text{reszta z dzielenia } 5^3 \text{ przez } 3 = 2,$$

a więc $r = 3$ i

$$Z_{L_5} = a_0 + 2\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 2\cdot a_3 + 1\cdot a_4 + 2\cdot a_5 + 1\cdot a_6 + 2\cdot a_7 \text{ itd.},$$

aż wyczerpiemy wszystkie cyfry L_5. Np. $L_5 = (121212)_5$ dzieli się przez 3, bo $Z_{L_5} = 12$ $(L_{10} = 4557)$.

Na obronie pracy w finale Konkursu pan Pelc przedstawił rozwiązanie swoją metodą zadania z naszej ligi:

Liczby całkowite z przedziału $\langle 0,999 \rangle$ zapisano jako liczby trzycyfrowe (liczbom mniejszym od stu dopisując na początku zero lub zera; np. siedem = 007, dwanaście = 012, zero = 000). Wszystkie te liczby napisano jedna za drugą w dowolnej kolejności. Powstała liczba N mająca 3000 cyfr (być może zaczynająca się od zera). Udowodnić, że N dzieli się przez 37.

Szukamy cechy podzielności przez 37 w układzie dziesiętnym. Mamy

$$k_1 = 10, \quad k_2 = 26, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 10.$$

Zatem $r = 4$ i $Z_{N_{10}} = a_0 + 10a_1 + 26a_2 + a_3 + 10a_4 + 26a_5 + a_6 + \ldots + a_{2997} + 10a_{2998} + 26a_{2999}$, ponieważ rozpatrywana liczba ma 3000 cyfr $(n = 2999)$.

Zmieniając kolejność składników otrzymujemy

$$Z_{N_{10}} = \sum_{i=0}^{999} a_{3i} + 10 \sum_{i=0}^{999} a_{3i+1} + 26 \sum_{i=0}^{999} a_{3i+2},$$

ale wszystkie sumy są równe, ponieważ w każdej z tych sum występują tyle samo razy cyfry od 0 do 9 (wynika to z konstrukcji liczby N). Tak więc

$$Z_{N_{10}} = (1+10+26) \sum_{i=0}^{999} a_{3i} = 37 \sum_{i=0}^{999} a_{3i},$$

co na mocy twierdzenia kończy dowód.

Jeszcze jedna uwaga: twierdzenie pana Pelca można sformułować inaczej:

Cecha podzielności przez dowolną liczbę w dowolnym systemie pozycyjnym dana jest przez

$$l_0 = 1, \quad l_i = k_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nie widać jednak wtedy, że k_i się powtarzają.

Rozwiązanie zadania M 389. Przypuśćmy, że punkty $A, B, C \in M$ nie są współliniowe. Jeśli $D \in M$, to odległości DA, DB, DC są całkowite; z nierówności trójkąta wynika, że $|DA - DB| \leq AB$, a więc $|DA - DB|$ może przyjmować tylko skończenie wiele wartości $(0, 1, \ldots, AB)$. Punkt D leży więc na jednej z hiperbol o ogniskach A i B i długości osi rzeczywistej $0, 1, \ldots, AB-1$, lub na prostej przechodzącej przez A i B. Analogicznie, D leży na jednej z hiperbol o ogniskach A i C i długości osi rzeczywistej $0, 1, \ldots, AC-1$, lub na prostej AC. Ponieważ dwie różne hiperbole lub prosta i hiperbola mają najwyżej 4 punkty wspólne, wynika stąd, że zbiór M jest skończony.

Rozwiązanie zadania M 390. Niech $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = n$ będą wszystkimi dzielnikami liczby n. Wówczas $a_1 a_k = a_2 a_{k-1} = \ldots = a_i a_{k-i+1} = \ldots = n$ (n jest iloczynem pewnych dwóch swoich dzielników). Wynika stąd, że $\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} = \sqrt[2k]{(a_1 \cdot a_k)\cdot(a_2 \cdot a_{k-1})\cdot \ldots \cdot (a_k \cdot a_1)} = \sqrt[2k]{n^k}$, a więc $\sqrt{n}$ jest równy średniej geometrycznej wszystkich dzielników n, a średnia geometryczna jest nie większa od ich średniej arytmetycznej. Rozważmy teraz różnicę $n + 1 - (a_i + a_{k-i+1}) = a_i a_{k-i+1} + 1 - a_i - a_{k-i+1} = a_i(a_{k-i+1} - 1) - (a_{k-i+1} - 1) = (a_i - 1)(a_{k-i+1} - 1) \geq 0$, stąd $2\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i + a_{k-i+1}) \leq k(n+1)$, czyli $\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k} \leq \frac{n+1}{2}$.

Rozwiązanie zadania M 391. Wybierzmy spośród danych kół koło o największym promieniu r_1 i wszystkie koła przecinające je. Ponieważ promienie tych wszystkich kół nie przekraczają r_1, zawierają się one w kole o promieniu $3r_1$. Pole S_1 obszaru zajmowanego przez wybrane koła wynosi najwyżej $\pi(3r_1)^2 = 9\pi r_1^2$, a więc pole pierwszego wybranego koła jest nie mniejsze niż $\frac{1}{9}S_1$.

Odrzućmy teraz wybrane koła i spośród pozostałych wybierzmy znów koło o największym promieniu r_2 i wszystkie koła przecinające je. Pole S_2 obszaru zajętego przez te koła jest nie większe od $9\pi r_2^2$. Kontynuując ten proces, aż do wyczerpania wszystkich kół, wybierzemy parami rozłączne koła o promieniach $r_1, r_2, \ldots, r_k$ i sumie pól $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_k^2 \geq$ $\geq \frac{1}{9}(S_1 + S_2 + \ldots + S_k) \geq \frac{1}{9}$.