



Ciekawym przykładem węzła jest sweter zrobiony na drutach. Na rysunku pokazany jest przykładowy wzór swetra.

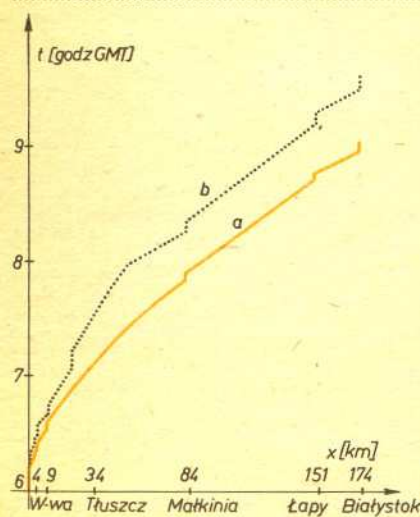
Węzeł jest zazwyczaj utożsamiany z poplątanym sznurkiem, ściśle jest to okrąg,  $S^1$ , zanurzony w trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$ . Węzły, które spotykamy w życiu, w szczególności w żeglarskim i alpinizmie, mają zazwyczaj wolne końce. Aby móc prowadzić ściśle rozważania, łączymy te końce.

Splot składa się, być może, z wielu składowych (sznurków). Dokładniej jest to rodzina rozłącznych okręgów zanurzonych w  $E^3$ . A więc węzeł jest to splot o jednej składowej. Dwa węzły (sploty) nazywamy równoważnymi, jeśli jeden można otrzymać z drugiego przez ruch w przestrzeni bez cięcia i wiązania. Odpowiada to dokładnie intuicji „takich samych węzłów”.

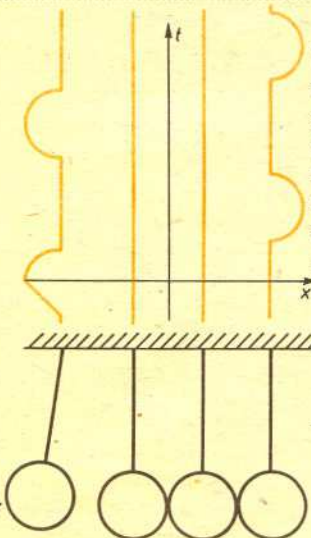
Jednym z kluczowych problemów teorii węzłów jest znalezienie metody, za pomocą której można stwierdzić, czy dane dwa węzły (sploty) są równoważne, czy nie. Problem ten nadal nie jest rozwiązany w pełnej ogólności.

Niezmiennikiem węzła (splotu) nazywamy obiekt algebraiczny (np. liczbę, wielomian, grupę) przypisany każdemu węzłowi (splotowi) w ten sposób, by równoważne węzły (sploty) miały przypisane takie same obiekty. Oczywiście ideałem byłoby, gdyby nierównoważne węzły (sploty) miały przypisane różne obiekty. Niestety, tak dobrych niezmienników nie ma i w teorii węzłów stosuje się wiele różnych niezmienników dostosowując ich użycie do sytuacji.

Jest jeszcze inny problem, prawie wszystkie znane niezmienniki definiuje się zawiłe używając aparatu topologii algebraicznej. Jeśli już zdarzy się niezmiennik o prostej definicji, to jest on mało użyteczny i trudno obliczalny, np. minimalna liczba punktów samoprzecięcia węzła zrzuconego na płaszczyznę (przy uwzględnieniu wszystkich możliwych rzutów).

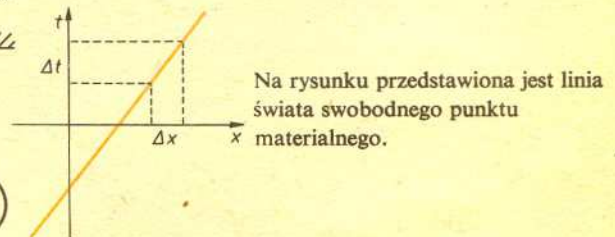


Rysunek przedstawia linie świata pociągu Warszawa-Białystok: a) zgodną z rozkładem jazdy i b) rzeczywistą. Odcinki równoległe do osi czasu odpowiadają postojom pociągu.



Na rysunku widoczne są linie świata środków mas kul w układzie trzech wahadeł do demonstracji zderzeń sprężystych.

W czasoprzestrzeni takimi wyróżnionymi układami współrzędnych są te, w których linia świata swobodnego punktu materialnego jest linią prostą. W dalszym ciągu ograniczymy się tylko do takich układów. Poza tym zaniedbamy dwa wymiary przestrzenne, co pozwoli zilustrować większość problemów na dwuwymiarowych rysunkach. Na osi pionowej odkładamy czas, na osi poziomej — położenie.



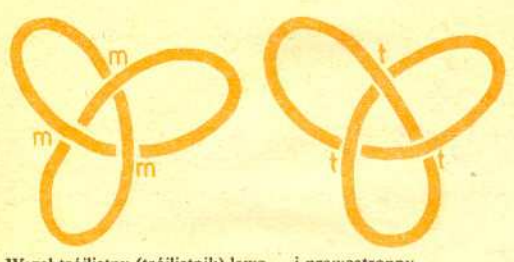
Na rysunku przedstawiona jest linia świata swobodnego punktu materialnego.

Czytelnikowi pozostawiamy naszkicowanie linii świata oscylatora harmonicznego, punktu materialnego przyspieszanego jednostajnie oraz odbijającego się od dwóch równoległych zwierciadeł fotonu. (cdn.)

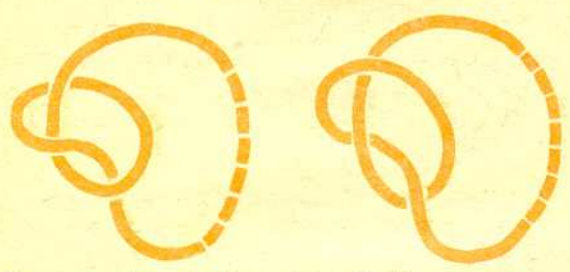




Węzeł trywialny      Węzeł trywialny o  $k$  składowych



Węzeł trójlistny (trójlistnik) lewo — i prawostronny



Taternicy stosują węzeł trójlistny w formie kluczeki.

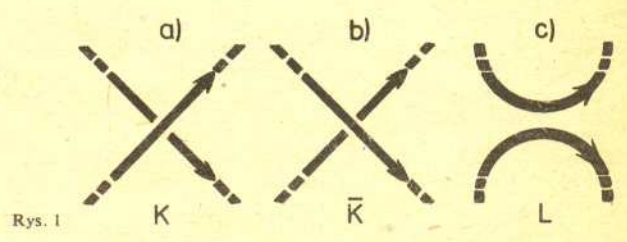


Węzeł ósemkowy (ósemka pojedyncza i podwójna) używany w żeglarstwie do pogrubienia końca liny. Podwójna ósemka może też służyć do niewielkiego skrócenia liny.

Niezmiennik opisany w dalszej części artykułu jest jedynym, który się łatwo definiuje, prosto oblicza, w dodatku odróżnia on wiele węzłów i splotów (choć nie wszystkie). Obiektami przypisywanymi splotom są wielomiany o współczynnikach całkowitych nazywane wielomianami Conwaya, na cześć ich odkrywcy, angielskiego matematyka J. H. Conwaya.

Niezawężony okrąg nazywamy węzłem trywialnym, ogólnie  $k$  niezawężonych okręgów nazywamy trywialnym splotem o  $k$  składowych. Wiele przykładów nietrywialnych węzłów znanych jest zapewne Czytelnikom uprawiającym żeglarstwo lub alpinizm. Niektóre z nich przedstawiamy na rysunkach. Potem, za pomocą wielomianu Conwaya spróbujemy je rozróżnić. Okazuje się, że większość da się rozróżnić, ale nie wszystkie. Wielomian Conwaya jest za słabym środkiem, by odróżnić np. lewostronny węzeł trójlistny od prawostronnego czy węzeł płaski od babskiego.

Wielomian Conwaya definiujemy dla zorientowanego splotu, tzn. każdy okrąg (sznurek) ma zadany kierunek (na rysunkach zaznaczany strzałką). Okazuje się jednak, że dla węzła orientacja jest nieistotna, węzeł z przeciwną orientacją do danego ma ten sam wielomian Conwaya.



Rys. 1

Skrzyżowania w diagramie zorientowanego splotu dzielą się na dwa rodzaje. Będziemy je nazywać skrzyżowaniami typu most (rys. 1a) i skrzyżowaniami typu tunel (rys. 1b) — zależnie od tego, która z dróg (most czy tunel) ma pierwszeństwo przy przejeździe. Pierwszeństwo ma ta droga, do której druga droga dochodzi z lewej strony. Zauważmy, że jeśli orientacja całego skrzyżowania, tj. obu dróg, zmieni się na przeciwną, to typ skrzyżowania nie ulegnie zmianie. W szczególności typy skrzyżowań węzła nie zależą od jego orientacji. Typy skrzyżowań węzłów trójlistnych podane są na rysunku.

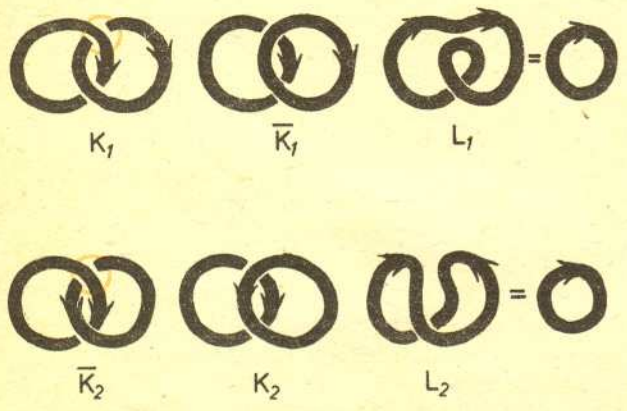
**Twierdzenie.** Każdemu zorientowanemu splotowi  $K$  można przyporządkować wielomian  $\nabla_K$  o współczynnikach całkowitych (zwany wielomianem Conwaya) tak, by były spełnione poniższe warunki:

- (a) Wielomian  $\nabla_K$  jest niezmiennikiem splotu  $K$ .
- (b) Wielomian Conwaya węzła trywialnego jest równy 1.
- (c) Jeśli trzy sploty  $K, \bar{K}, L$  mają identyczne diagramy wszędzie, z wyjątkiem fragmentów przedstawionych na rysunku 1, to

$$\nabla_K(z) - \nabla_{\bar{K}}(z) = z \nabla_L(z).$$

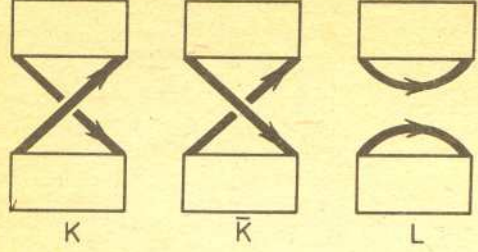
Powyższe warunki wyznaczają wielomian Conwaya jednoznacznie.

Zwróćmy uwagę, że w fragmencie odróżniającym sploty  $K$  i  $\bar{K}$  w splotcie  $K$  występuje skrzyżowanie typu most, a w splotcie  $\bar{K}$  skrzyżowanie typu tunel. Trzeba o tym pamiętać obliczając wielomian Conwaya splotu (rys. 2). Dowód tego, że wielomian Conwaya jest wyznaczony jednoznacznie, wymaga bardziej zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Zainteresowanych Czytelników odesłać mogę do skryptu *Topologia 3-wymiarowych rozmaitości* W. Jakobsche i autora artykułu (będzie wkrótce wydany przez Uniwersytet Warszawski). Tutaj wykażemy jedynie, że można określić wielomian Conwaya dla każdego zorientowanego splotu.



Rys. 2. Mamy:  $\nabla_{L_1} = \nabla_{L_2} = 1$  (z warunku b);  $\nabla_{\bar{K}_1} = \nabla_{K_2} = 0$  (będzie pokazane dalej);  $\nabla_{K_1}(z) - \nabla_{\bar{K}_1}(z) = z \nabla_{L_1}(z)$  i  $\nabla_{K_2}(z) - \nabla_{\bar{K}_2}(z) = z \nabla_{L_2}(z)$  (z warunku c): Tak więc  $\nabla_{K_1}(z) = z$ ;  $\nabla_{\bar{K}_2}(z) = -z$ .



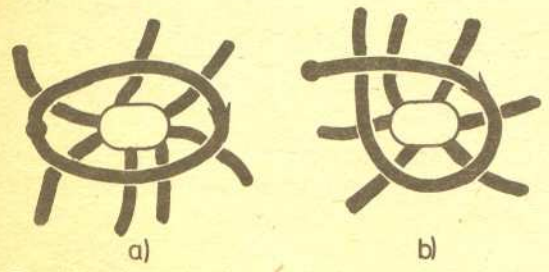


Rys. 3

Dowód rozpoczniemy od obliczenia wielomianu Conwaya splotu rozkładalnego. Splot nazywamy rozkładalnym, jeśli jego diagram da się podzielić na dwa rozłączne kawałki, każdy leżący w swojej skrzynce (tak jak splot  $L$  na rysunku 3). Wykażemy, że wielomian Conwaya splotu rozkładalnego jest równy 0. Zauważmy, że splot  $\bar{K}$  z rysunku 3 możemy otrzymać ze splotu  $K$  przez obrót górnej części o  $360^\circ$ , a więc  $K$  jest równoważny  $\bar{K}$ . Mamy zatem

$$\nabla_K(z) = \nabla_{\bar{K}}(z) \quad i \quad 0 = \nabla_K(z) - \nabla_{\bar{K}}(z) = z\nabla_L(z),$$

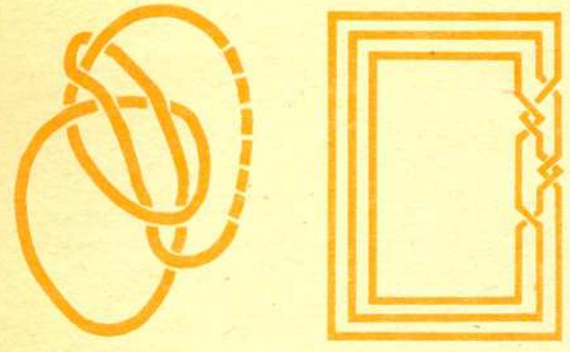
czyli  $\nabla_L(z) = 0$ .



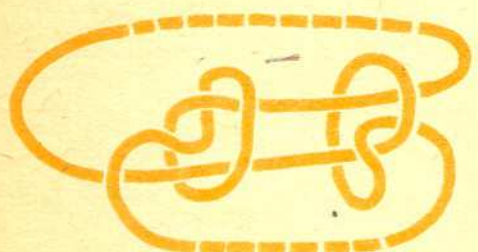
Rys. 4. Startujemy z dowolnego punktu (oznaczonego kropką) i posuwając się zgodnie z orientacją zmieniamy tunel na most lub most na tunel tak, by droga, po której poruszamy się, szła góra. Albo dojdziemy z powrotem do kropki (a), albo do skrzyżowania z już przebytą drogą (b).

Teraz w dowodzie istnienia wielomianu Conwaya dla każdego zorientowanego splotu zastosujemy indukcję względem liczby samoprzecięć (skrzyżowań) w diagramie splotu. Splot, którego diagram nie ma samoprzecięć, jest splotem trywialnym. Jeśli jest on węzłem (ma tylko jedną składową), to jego wielomian jest równy 1. Jeśli ma więcej niż jedną składową, to jest on rozkładalny i jego wielomian jest równy 0.

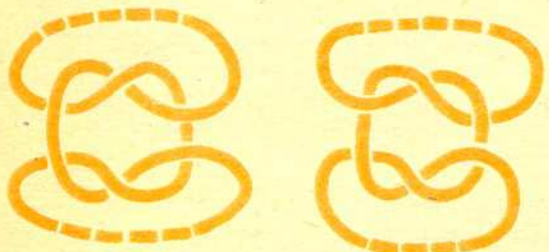
Załóżmy teraz, że dla splotów, które mają mniej niż  $n$  samoprzecięć, wielomian Conwaya jest już określony. Rozważmy diagram splotu z  $n$  samoprzecięciami. Znajomość wielomianu Conwaya tego splotu jest równoważna znajomości wielomianu splotu otrzymanego z niego przez zamianę pewnej liczby mostów na tunele i tuneli na mosty. (Korzystamy z warunku (c) i z fęgo, że splot  $L$  w tym warunku ma mniej samoprzecięć niż  $K$  i  $\bar{K}$ , a więc jego wielomian jest już określony). Zatem wystarczy znać wielomian Conwaya jednego ze splotów z rysunku 4. Pierwszy z tych splotów jest rozkładalny, a drugi jest równoważny ze splotem, którego diagram ma mniej niż  $n$  samoprzecięć. Kończy to indukcyjny dowód istnienia wielomianu Conwaya.



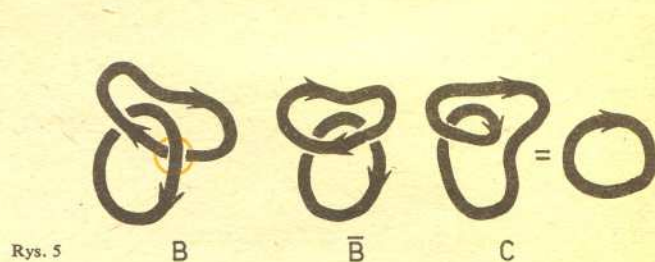
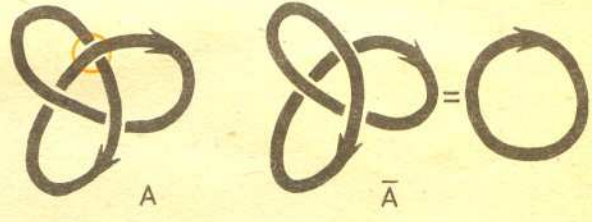
Węzeł ratowniczy (skrajny tatrzański). W tablicach węzłów oznaczany symbolem  $6_3$  jako trzeci o diagramie z sześcioma punktami samoprzecięcia. (Pozostawiamy Czytelnikom sprawdzenie, że oba rysunki przedstawiają ten sam węzeł). Używany jest przy wyciąganiu z wody człowieka, który nie utracił przytomności. Jedną ręką ratowany może trzymać się liny, a drugą zawiązać węzeł ratowniczy i znaleźć się w niezaciskającej się pętli.



Związ wantowy (przez taterników zwany węzłem rybackim) służy do łączenia dwóch lin.



Węzeł płaski i węzeł babski. Przy wiązaniu węzła płaskiego łatwo się pomylić i zawiązać węzeł babski, mniej pewny, a trudniejszy do rozwiązania.



Rys. 5

A teraz kilka przykładów. Zaczniemy od lewostronnego węzła trójlistnego. Stosując dwukrotnie warunek (c) (patrz rys. 5) otrzymujemy

$$\nabla_A(z) = \nabla_{\bar{A}}(z) + z\nabla_B(z) = 1 + z\nabla_B(z)$$

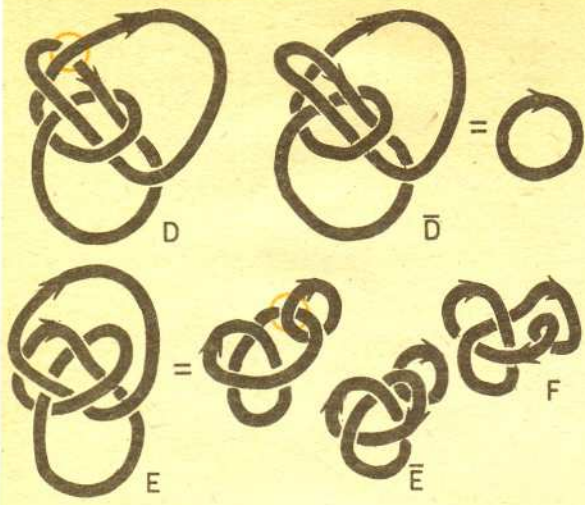
$$\nabla_B(z) = \nabla_{\bar{B}}(z) + z\nabla_C(z) = z.$$

Tak więc  $\nabla_A(z) = 1 + z^2$ . Stąd wnioskujemy, że węzeł trójlistny lewostronny nie jest węzłem trywialnym.

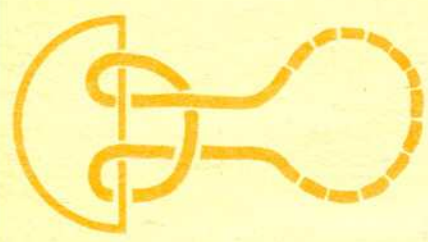
Nie musimy obliczać oddzielnie wielomianu Conwaya prawostronnego węzła trójlistnego. Zauważmy bowiem, że jest on lustrzanym odbiciem węzła lewostronnego (wszystkie mosty zmieniają się w tunele). Prawdziwy jest następujący fakt: Jeśli splot  $l(K)$  jest lustrzanym odbiciem splotu  $K$ , to  $\nabla_{l(K)}(z) = \nabla_K(-z)$ . Wystarczy w tym celu sprawdzić, że wielomian  $\tilde{\nabla}_K$  określony wzorem

$$\tilde{\nabla}_K(z) = \nabla_{l(K)}(-z)$$

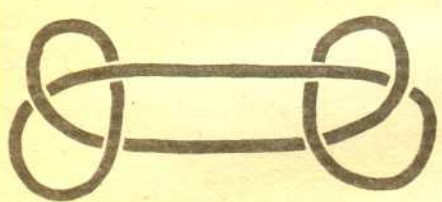




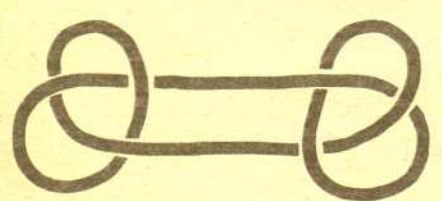
Rys. 6



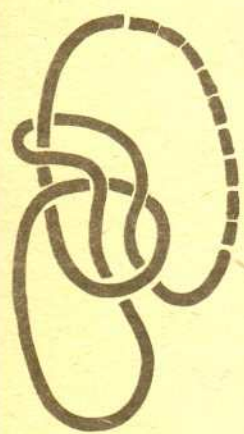
Wyblinka traktowana jako splot o dwóch składowych: linia i karabinek, do którego przymocowano linę.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10. Oto równie skuteczny jak ratowniczy węzeł niezaciskający się. Czy wielomian Conwaya odróżnia go od węzła ratowniczego?

spełnia warunki (a), (b), (c), a więc z jednoznaczności wielomianu Conwaya mamy  $\tilde{V}_K(z) = V_K(z)$ , czyli to, co trzeba było dowieść. Przy sprawdzaniu warunku (c) należy zauważyć, że tam, gdzie w splocie  $K$  był most, tam w splocie  $l(K)$  jest tunel i odwrotnie, a więc z warunku (c)

$$V_{l(K)}(z) - V_{l(K)}(z) = zV_{l(L)}(z),$$

czyli, zmieniając  $z$  na  $-z$

$$V_{l(K)}(-z) - V_{l(K)}(-z) = zV_{l(L)}(-z),$$

a zatem

$$\tilde{V}_K(z) - \tilde{V}_K(z) = z\tilde{V}_L(z).$$

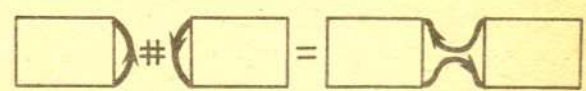
W szczególności wielomian Conwaya prawostronnego węzła trójlistnego jest też równy  $1+z^2$ . Aby odróżnić oba trójlistniki, trzeba użyć bardziej zaawansowanych metod topologii algebraicznej.

Zauważmy jeszcze, że jeśli splot  $-K$  otrzymany jest ze spłotu  $K$  przez zmianę orientacji wszystkich składowych, to (jeszcze łatwiej niż poprzednio) można udowodnić, iż  $V_K(z) = V_{-K}(z)$  (jeśli w tożsamości (c) wszystkie spłoty zmienimy na przeciwne, to pozostanie ona prawdziwa). W szczególności wielomian węzła nie zależy od orientacji węzła.

Obliczmy jeszcze wielomian Conwaya węzła ratowniczego (rys. 6).  $\bar{D}$  jest węzłem trywialnym,  $\bar{E}$  splotem rozkładalnym, a  $F$  węzłem trójlistnym. Stosując dwukrotnie warunek (c) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V_D(z) &= V_{\bar{D}}(z) + zV_{\bar{E}}(z) = 1 + z(V_{\bar{E}}(z) + zV_F(z)) = \\ &= 1 + z^2 \cdot (1 + z^2) = 1 + z^2 + z^4. \end{aligned}$$

Tak więc węzeł ratowniczy nie jest ani trójlistnikiem, ani węzłem trywialnym.



Rys. 7 A B A#B

Wielomian Conwaya węzła płaskiego i babskiego znajdziemy bez specjalnych obliczeń. Wprowadźmy pojęcie sumy spłotów. Suma spłotów  $A$  i  $B$  jest pokazana na rysunku 7. W przypadku węzłów jest ona określona jednoznacznie, natomiast dla spłotów nie będących węzłami trzeba jeszcze powiedzieć, które składowe łączymy. Prawdziwy jest wzór

$$V_{A \# B}(z) = V_A(z) \cdot V_B(z).$$

Dowodzimy go przez indukcję względem liczby punktów samoprzecięcia w diagramie  $B$ . Szczegóły pozostawiam Czytelnikom.

Zauważmy teraz, że węzeł płaski jest sumą dwóch różnych trójlistników (rys. 8), a węzeł babski sumą dwóch prawostronnych trójlistników (rys. 9). Tak więc ich wielomiany Conwaya są oba równe  $(1+z^2) \cdot (1+z^2) = 1+2z^2+z^4$ . Aby te węzły odróżnić, znów trzeba korzystać z innych metod.

Nie powinno jednak nikomu pozostać wrażenie, iż są jakieś niezmienniki węzłów znacznie lepsze niż wielomian Conwaya, a tylko niedostępne dla niezawansowanego Czytelnika: Jest wręcz przeciwnie — wielomian Conwaya to najlepszy znany pojedynczy niezmiennik.

Proponuję teraz Czytelnikom obliczenie wielomianu Conwaya innych węzłów i spłotów opisanych w artykule (przy wyblince należy zwrócić uwagę, że wynik może zależeć od orientacji składowych).