Beznadziejne marzenie o całej prawdzie

Jeśli nie czepiać się sformułowań, to bodajże pierwszym, który zdał sobie sprawę z faktu, że

pełna teoria Wszechświata nie może być mniej skomplikowana niż sam Wszechświat,

był Tales. Stanowisko takie nazywane bywa pesymizmem poznawczym. Warto zwrócić uwagę, że nie ma ono (właściwie) nic wspólnego z agnostycyzmem (programową niepoznawalnością). Tutaj, owszem, poznajemy, ale zawsze tylko częściowo.

Wiedza pewna

choćby częściowa, też jest przecież coś warta. Tales, fundator greckiego modelu nauki, uczynił wiele dla sformułowania warunków prowadzących do uzyskiwania twierdzeń — taką nazwę nadano „atomom" wiedzy pewnej.

Pierwsza zasada (w późniejszej, np. pitagorejskiej terminologii) orzeka, że twierdzenie musi dotyczyć abstraktów, a nie konkretnych realnych obiektów Można to dobrze zaobserwować w zdaniu

pies ma cztery nogi,

które nie musi być prawdziwe w odniesieniu do konkretnego Azora czy Burka, będąc jednak niewątpliwie twierdzeniem zoologii, gdzie nazwa „pies" oznacza pewien abstrakt, pewien gatunek czworonogów.

Druga zasada (znacznie później jawnie sformułowana, choć mocno zakorzeniona od czasów Euklidesa) to konieczność formalnego wyrażania twierdzeń. W istocie poszerza ona pierwszą zasadę dotyczącą (mówiąc gramatycznie) rzeczowników na czasowniki i inne formy językowe. Zdanie

punktów na odcinku jest tyle samo, co na prostej

jest twierdzeniem dopiero po przyjęciu pewnego specyficznego rozumienia zwrotu, „jest tyle samo", a więc i wyrażeniu zgody na szereg intuicyjnie paradoksalnych, później odkrytych, konsekwencji tej formalnej umowy.

Trzecia wreszcie zasada każe każde twierdzenie formułować jako zdanie warunkowe. Zdanie

woda płynie z góry na dół

jest łatwe do sfalsyfikowania przez odkręcenie kranu, choć jakąś prawdę przecież wyraża. Często założenia nie są wpisane w samo twierdzenie, a czyni się je wszystkie na początku, przed przystąpieniem do formułowania większej liczby twierdzeń — w takim przypadku nazywa się je aksjomatyką. Dopiero w kontekście owych założeń (aksjomatów) można ocenić, czy zdanie jest twierdzeniem, czy też nie. Stwierdzenie, że

suma kątów trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych

nie jest twierdzeniem geometrii euklidesowej i jest twierdzeniem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego.

Ostatecznie więc kształt twierdzeń, elementów wiedzy pewnej ma być następujący

> jeśli zachodzą następujące warunki...
> i jeśli nic innego nie ma wpływu na wynik,
> to na pewno będzie tak...

Modele, czyli manekiny rzeczywistości

Pitagorejczycy, którzy pierwsi skodyfikowali sposób budowania twierdzeń, orzekli, że jedyną dyscypliną umożliwiającą naprawdę poprawne ich formułowanie jest geometria. Opinię tę, rozciągniętą na całą matematykę, podziela i dziś wielu. Można np. znaleźć ją w pracach Levi-Straussa, który ubolewa nad aktualną niemożnością pełnego zmatematyzowania antropologii. Matematyzuje się zresztą (właśnie w poszukiwaniu wiedzy pewnej) prawie wszystkie gałęzie poznania, w tym wszystkie gałęzie przyrodoznawstwa. A taka fizyka została zmatematyzowana właściwie w całości.

Za luksus posiadania wiedzy pewnej płaci się jednak bardzo konkretną cenę. W akcie dostosowywania obiektu badanego do możliwości wypowiadania o nim

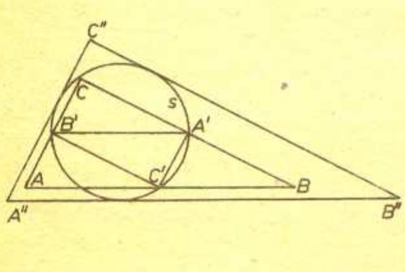
Rozwiązanie zadania F 164. Na powierzchni każdego ziarenka szkła promienie światła ulegają załamaniu i odbiciu. W bezbarwnej cieczy o współczynniku załamania takim samym jak w szkle ziarenka przestają odbijać światło, stają się więc przezroczyste i zabarwione na swój pierwotny kolor. Dla szkła trudno jest dobrać ciecz o równym mu współczynniku załamania, ale podobne doświadczenie można wykonać z kolorowym, przezroczystym plastykiem używając jako cieczy roztworu soli. Zmiany stężenia roztworu powodują zmianę współczynnika załamania — można w ten sposób dobrać odpowiednią jego wartość, by proszek początkowo biały stał się kolorowy.

Rozwiązanie zadania M 387. Mamy

$$\underbrace{11\ldots1}_{(n\text{-razy})}\ \underbrace{22\ldots25}_{(n+1)\text{-razy}} = (10^{2n+1} + \ldots + 10^{n+2}) + 2\cdot(10^{n+1} + \ldots + 10) + 5 = \frac{1}{9}\cdot(10^{2n+2} - 10^{n+2}) + 2\cdot\frac{1}{9}(10^{n+2} - 10) + \frac{45}{9} = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 2\cdot5\cdot10^{n+1} + 25) = \left[\frac{1}{3}\cdot(10^{n+1}+5)\right]^2,$$ czyli

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-razy}}\ \underbrace{22\ldots25}_{(n+1)\text{-razy}}} = \underbrace{33\ldots35}_{(n+1)\text{-razy}}$$

Rozwiązanie zadania M 386. Rozważmy okrąg s opisany na trójkącie $A'B'C'$, gdzie A', B', C' są środkami boków BC, AC, AB. Niech $A''B''C''$ będzie trójkątem, którego boki są równoległe do boków trójkąta ABC i styczne do okręgu s. Promień okręgu s, jako okręgu wpisanego w trójkąt $A''B''C''$ jest nie mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC, równocześnie jest on równy połowie promienia okręgu opisanego na ABC.



Rozwiązanie zadania M 388. Niech A będzie zbiorem środków skrajnych pól szachownicy. Aby wykazać, że żądany podział nie jest możliwy, zauważmy, że 13 prostymi nie można oddzielić wszystkich punktów zbioru A. Jeśli n prostych dzieli zbiór A na k części, to dodając $n+1$-szą prostą możemy podzielić najwyżej dwie spośród tych części, a więc podzielić zbiór A na $k+2$ części. Przez indukcję wynika stąd, że zbiór A trzynastoma prostymi można podzielić na najwyżej 26 części, A zaś zawiera 28 punktów.

Rozwiązanie zadania F 165. Pogorszenie widoczności w deszczu i we mgle powodowane jest rozpraszaniem światła na kropelkach wody. Na jaką głębokość wnika światło w zawiesinę kropel wody w powietrzu? Dla grubego oszacowania przyjmijmy, że całe światło padające na kroplę jest rozpraszane. Koncentracja n zawiesiny wynosi:

$$n = \frac{3}{4\pi}\frac{V}{r^3},$$

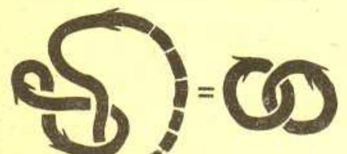
gdzie V — objętość wody w jednostce objętości powietrza, r — promień kropli. W walcu o przekroju S i długości L wyciętym wzdłuż biegu promienia świetlnego znajduje się $N = L \cdot S \cdot n$ kropel zawiesiny, przesłaniają one więc powierzchnię $\sigma = N \cdot \pi \cdot r^2$. Gdy $\sigma = S$, to $L = H$ — zasięg widzenia; skąd otrzymujemy

$$H = \frac{4r}{3V}.$$

Dla chmury i deszczu V jest prawie identyczne (krople deszczu powstają w wyniku przyłączania małych kropel przez duże w atmosferze pary nasyconej), ale krople deszczu są większe i stąd dalsza w nim widoczność (typowe promienie kropel mają rozmiary rzędu 10^{-2} cm dla deszczu i 10^{-3} cm dla mgły).

Rozwiązanie zadań z artykułu *Węzły i sploty*

$\bar{A}$ A



B

$\nabla_{\bar{A}}(z) = \nabla_A(z) - z\nabla_B(z)$ (minus, bo w węźle $\bar{A}$ jest tunel, a w węźle A most), $B = \bar{K}_2$ (rys. 2). Tak więc wielomian Conwaya ósemki pojedynczej jest równy $1-z^2$. Wielomian Conwaya węzła z rysunku 10 jest równy $1-z^2-z^4$, a więc to inny węzeł niż ratowniczy.
Wielomiany Conwaya ósemki podwójnej, wyblinki (niezależnie od orientacji) i związku wantowego są równe odpowiednio: $1+2z^2$, z^3, $1+4z^2+5z^4+z^6$.

niewątpliwych twierdzeń zastępuje się ten obiekt (zgodnie z przytoczonymi zasadami) jego abstrakcyjnym substytutem zwanym modelem (najczęściej jest to model matematyczny). I choć z realiów ów model tworzyliśmy, sam on jest już tylko owych realiów atrapą.

Pierwszą ze specyficznych własności modeli, na którą warto zwrócić uwagę, jest ich wyizolowanie. Jest w nich to i tylko to, co z rzeczywistości w danej chwili chcieliśmy wydzielić. „Reszta" rzeczywistości ulega pełnemu unicestwieniu. Doskonale widać to przy rozważaniu np. ruchu dwóch (czy wielu) punktów materialnych, który rozważamy w próżni daleko doskonalszej niż jakakolwiek dająca się realnie pomyśleć. Mimo to jednak w ten właśnie sposób stworzono mechanikę nieba.

Drugą z cech modeli jest ich regularność. Poza niewielką liczbą założonych specjalnych własności ich elementów modele są wszędzie i zawsze jednakowe. Tak np. gaz doskonały (czyli model gazu) spełnia w całym zakresie ciśnień i temperatur prawo Clapeyrona, prawo rozkładu ciśnień Daltona itd., itp.

Z tych właśnie cech wywodzi się zaleta, dla której modele się buduje — ich całkowita i pełna poznawalność. One też stanowią o niemożności potraktowania ich jako tożsamych z rzeczywistością.

Tak zwane poprawki

Model oczywiście można doskonalić. Mianowicie — likwidować kolejno różnice, jakie dostrzeżemy między nim a realiami. Dopasowywać model do rezultatów naszych kontaktów z rzeczywistością, czyli zarówno programowych, jak i przypadkowych doświadczeń.

Najpowszechniej stosowana metoda to ograniczenie stosowalności modelu. I tak mówimy, że mechanika klasyczna jest dobrym modelem dla niewielkich prędkości, gaz doskonały sprawdza się w średnich temperaturach i dla dużych rozrzedzeń itd. W ten sposób nasza wiedza pewna staje się coraz bardziej fragmentaryczna. W granicy wiemy wszystko o niczym.

Następna z metod komplikuje model. Dołącza się do wzorów kolejne człony, coraz dłuższe i coraz bardziej złożone. Równania zaczynają powoli wykraczać poza nasze możliwości ich rozwiązania, a potrzebnych do nich danych zaczyna być więcej, niż jesteśmy w stanie zgromadzić. W granicy nie wiemy nic o wszystkim.

Wreszcie możemy modelom nadać charakter statystyczny zastępując ich kategoryczne orzeczenia stwierdzeniami o wystąpieniu takich czy innych zjawisk z określonym prawdopodobieństwem. W konsekwencji wiemy wszystko o wszystkim, ale nie na pewno.

Tak czy inaczej owo poprawianie w znacznej mierze likwiduje cel, dla którego w ogóle modele zaczęto budować.

Nie jedna wiedza, a wiele

Łatwo zrozumieć poprawianie (czy psucie, jak kto woli) pięknych, prostych, zrozumiałych modeli rzeczywistości. Istotnie, jeśli wynik uzyskany w praktyce odbiega od modelowego przewidywania, coś trzeba zmienić. Stary dowcip mówi, że są jednak trzy możliwości. Albo zmienić model, albo zmienić rzeczywistość, albo zmienić, że odbiega. Dowcip zaleca zastosowanie trzeciego wyjścia. Sądzę, że w omawianej sprawie owo zalecenie też jest właściwe.

Te zbyt może piękne i zbyt może proste modele w okresie swojego rozkwitu od XVII po XX wiek sprawdziły się przecież dając ludziom przemysł, energię pary i elektryczności, ba, nawet nauczyły nas latać. Nie sposób więc uznać je za błędne. Z drugiej strony odstępstwa przewidywań modeli od wyników doświadczeń też nie są urojeniem, a rzeczywistości zmienić się nie da. Da się natomiast zmienić nasz pogląd na to, jakie teorie rzeczywistości (czyli opisy modeli) są dobre. Opowiadałbym się za tym, by uznać za dobre zarówno te proste, jak też i ich skomplikowane, ale wierniejsze wersje. Każdemu zjawisku odpowiadałby w ten sposób cały szereg teorii relacjonujących stosunki rzeczywiste na różnych poziomach głębokości oglądu. I każdy miałby możność zstępować po nich, jak po schodach, tak głęboko, jak on sam i potrzeby wynikające z jego pracy i aspiracji by mu kazały. I na taki model wiedzy, jak sądzę, można się zgodzić. Jeśli tylko zrezygnować z beznadziejnego marzenia o nieosiągalnej całej prawdzie.

Marek KORDOS