

John Smith kupił cztery towary, takie, że zarówno suma, jak i iloczyn ich cen były równe 7.11. Trzeba obliczyć, ile kosztował każdy z nich.

Zadanie sprowadza się do znalezienia takiej czwórki liczb (a, b, c, d) , że:

- $a+b+c+d = 7,11$,
- $abcd = 7,11$.

W dziedzinie liczb rzeczywistych układ ten ma oczywiście continuum rozwiązań. Naturalne jest jednak przyjąć, że ceny muszą wyrażać się całkowitymi liczbami centów. Jeżeli więc oznaczymy $K = 100a$, $L = 100b$, $M = 100c$, $N = 100d$, to warunki 1. i 2. przyjmą postać:

- $K+L+M+N = 100a+100b+100c+100d = 100(a+b+c+d) = 711$,
- $KLMN = 100a \cdot 100b \cdot 100c \cdot 100d = 100^4 abcd = 711\,000\,000$,
oraz dodatkowo:
- $K, L, M, N \in \mathbb{N}$.

Gdy w ten sposób sprecyzowaliśmy ściśle problem, należy wybrać metodę jego rozwiązania. Najszybszym i wymagającym najmniej pracy sposobem jest wyrczenie się komputerem. Dla maszyny musimy jednak przygotować dokładny przepis (algorytm) szukania rozwiązania. Najprostszy algorytm polega na tworzeniu wszystkich czwórek liczb naturalnych mniejszych od 711 i sprawdzaniu, czy spełniają one warunki zadania. Jednak przeszukiwanie wszystkich kombinacji jest bardzo uciążliwe — nawet szybki komputer robiłby to niezwykle długo. Konieczne jest więc ograniczenie liczby prób. Trzy takie ograniczenia nasuwają się od razu:

- będziemy rozpatrywać tylko rosnące ciągi liczb — unikniemy w ten sposób wyliczania wszystkich permutacji i będziemy mogli

skorzystać z zależności, że jeżeli $a_1+a_2+\dots+a_n = C$ i

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \text{ to } a_1 \leq \frac{1}{n} \cdot C,$$

- jeżeli iloczyn poszukiwanych n liczb nie jest podzielny przez iloczyn pewnego ich podzbioru, to nie ma potrzeby poszukiwać pozostałych,
- ostatnią liczbę można wyliczyć z pozostałych i warunku na sumę.

Można wprowadzić dalsze ograniczenia na liczbę sprawdzeń, ale trzeba przecież wybrać jakiś kompromis między efektywnością algorytmu a wysiłkiem włożonym w jego opracowanie — nie chodzi o to, by rozwiązać zadanie „na piechotę”, a komputerowi kazać tylko wydrukować wyniki.

Oto algorytm:

- Wybierz kolejną liczbę naturalną $K \geq 1$; jeżeli $K > 711/4$, to koniec.
- Jeżeli K jest dzielnikiem $711 \cdot 100^4$, wykonaj 3, w przeciwnym przypadku wykonaj 1.
- Wybierz kolejną liczbę naturalną $L \geq K$; jeżeli $L > (711-K)/3$, to wykonaj 1.
- Jeżeli L jest dzielnikiem $711 \cdot 100^4/K$, wykonaj 5, w przeciwnym przypadku wykonaj 3.
- Wybierz kolejną liczbę naturalną $M \geq L$; jeżeli $M > (711-K-L)/2$, to wykonaj 3.
- Jeżeli M jest dzielnikiem $711 \cdot 100^4/(K \cdot L)$, wykonaj 7, w przeciwnym przypadku wykonaj 5.
- Jeżeli $711 \cdot 100^4/(K \cdot L \cdot M) = 711-K-L-M$, to czwórka $(K, L, M, N = 711-K-L-M)$ jest rozwiązaniem.
- Wykonaj 5.

Algorytm ten zapisany w języku FORTRAN wykonywał się na maszynie CDC CYBER 73 przez 4,5 s i sprawdził tylko 5435 pełnych czwórek.

Ksawery STOJDA

Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 383. Budujemy tablicę, zawierającą w n -tym wierszu 2^{n-1} liczb naturalnych umieszczając w pierwszym wierszu dowolną liczbę naturalną $a > 1$, a następnie pod każdą liczbą b występującą w k -tym wierszu umieszczamy $b+1$ oraz b^2 :

Wykazać, że dla każdego n wszystkie liczby w n -tym wierszu są różne.

Rozwiązanie na str. 3

M 384. Liczbę całkowitą m taką, że $|x-m| < 1$ nazwiemy zaokrągleniem liczby rzeczywistej x . (Gdy x nie jest całkowite, mamy dwa zaokrąglenia: $[x]$ i $[x]+1$.) Wykazać, że każdą z n liczb x_1, \dots, x_n można zaokrąglić tak, że suma dowolnego podzbioru zbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ będzie się różnić od sumy wybranych zaokrągleń liczb najwyżej o $\frac{n+1}{4}$.

Rozwiązanie na str. 3

M 385. Wykazać, że $99999 + 100000\sqrt{3}$ nie jest kwadratem liczby postaci $a+b\sqrt{3}$, gdzie a i b są całkowite.

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 163. Na poziomej gładkiej powierzchni znajduje się sztywny, jednorodny pręt o długości L poddany działaniu sił F_1 i F_2 (rysunek). Jaka siła (naprężenie) działa w przekroju odległym o H od końca pręta?

Tym razem wraz z treścią podajemy kilka wyników, a wśród nich prawidłowy. Zadaniem Czytelników jest wskazanie go bez uciekania się do rozwiązywania problemu.

$$\text{a) } N = \left(\frac{H}{L}\right)^2 (F_1 + F_2) - F_2, \quad \text{b) } N = \frac{H}{L} (F_1 + F_2) - F_1,$$

$$\text{c) } N = H(F_1 + F_2) - LF_2, \quad \text{d) } N = \frac{H}{L} (F_1 + F_2) - F_2,$$

$$\text{e) } N = \left(\frac{H}{L}\right)^2 F_1 - \left(1 - \frac{H}{L}\right)^2 F_2$$

(N jest siłą, z jaką element A działa na B).

Rozwiązanie na str. 6

