O konkursie 7.11 raz jeszcze

John Smith kupił cztery towary, takie, że zarówno suma, jak i iloczyn ich cen były równe 7.11. Trzeba obliczyć, ile kosztował każdy z nich.

Zadanie sprowadza się do znalezienia takiej czwórki liczb (a, b, c, d), że:
1. $a+b+c+d = 7{,}11$,
2. $abcd = 7{,}11$.

W dziedzinie liczb rzeczywistych układ ten ma oczywiście continuum rozwiązań. Naturalne jest jednak przyjąć, że ceny muszą wyrażać się całkowitymi liczbami centów. Jeżeli więc oznaczymy $K = 100a$, $L = 100b$, $M = 100c$, $N = 100d$, to warunki 1. i 2. przyjmą postać:

1'. $K+L+M+N = 100a+100b+100c+100d = 100(a+b+c+d) = 711$,

2'. $KLMN = 100a\cdot 100b\cdot 100c\cdot 100d = 100^4\, abcd = 711\,000\,000$,

oraz dodatkowo:

3'. $K, L, M, N \in N$.

Gdy w ten sposób sprecyzowaliśmy ściśle problem, należy wybrać metodę jego rozwiązania. Najszybszym i wymagającym najmniej pracy sposobem jest wyręczenie się komputerem. Dla maszyny musimy jednak przygotować dokładny przepis (algorytm) szukania rozwiązania. Najprostszy algorytm polega na tworzeniu wszystkich czwórek liczb naturalnych mniejszych od 711 i sprawdzaniu, czy spełniają one warunki zadania. Jednak przeszukiwanie wszystkich kombinacji jest bardzo uciążliwe — nawet szybki komputer robiłby to niezwykle długo. Konieczne jest więc ograniczenie liczby prób. Trzy takie ograniczenia nasuwają się od razu:

1. będziemy rozpatrywali tylko rosnące ciągi liczb — unikniemy w ten sposób wyliczania wszystkich permutacji i będziemy mogli skorzystać z zależności, że jeżeli $a_1+a_2+\ldots+a_n = C$ i $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, to $a_1 \leqslant \frac{1}{n}\cdot C$,
2. jeżeli iloczyn poszukiwanych n liczb nie jest podzielny przez iloczyn pewnego ich podzbioru, to nie ma potrzeby poszukiwać pozostałych,
3. ostatnią liczbę można wyliczyć z pozostałych i warunku na sumę.

Można wprowadzić dalsze ograniczenia na liczbę sprawdzeń, ale trzeba przecież wybrać jakiś kompromis między efektywnością algorytmu a wysiłkiem włożonym w jego opracowanie — nie chodzi o to, by rozwiązać zadanie „na piechotę", a komputerowi kazać tylko wydrukować wyniki.

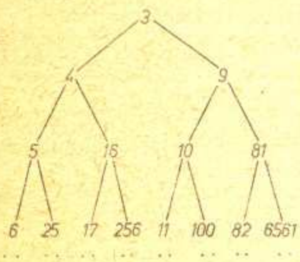
Oto algorytm:
1. Wybierz kolejną liczbę naturalną $K \geqslant 1$; jeżeli $K > 711/4$, to koniec.
2. Jeżeli K jest dzielnikiem $7{,}11\cdot 100^4$, wykonaj 3, w przeciwnym przypadku wykonaj 1.
3. Wybierz kolejną liczbę naturalną $L \geqslant K$; jeżeli $L > (711-K)/3$, to wykonaj 1.
4. Jeżeli L jest dzielnikiem $7{,}11\cdot 100^4/K$, wykonaj 5, w przeciwnym przypadku wykonaj 3.
5. Wybierz kolejną liczbę naturalną $M \geqslant L$; jeżeli $M > (711-K-L)/2$, to wykonaj 3.
6. Jeżeli M jest dzielnikiem $7{,}11\cdot 100^4/(K\cdot L)$, wykonaj 7, w przeciwnym przypadku wykonaj 5.
7. Jeżeli $7{,}11\cdot 100^4/(K\cdot L\cdot M) = 711-K-L-M$, to czwórka $(K, L, M, N = 711-K-L-M)$ jest rozwiązaniem.
8. Wykonaj 5.

Algorytm ten zapisany w języku FORTRAN wykonywał się na maszynie CDC CYBER 73 przez 4,5 s i sprawdził tylko 5435 pełnych czwórek.

Ksawery STOJDA

Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI



M 383. Budujemy tablicę, zawierającą w n-tym wierszu 2^{n-1} liczb naturalnych umieszczając w pierwszym wierszu dowolną liczbę naturalną $a > 1$, a następnie pod każdą liczbą b występującą w k-tym wierszu umieszczamy $b+1$ oraz b^2:
Wykazać, że dla każdego n wszystkie liczby w n-tym wierszu są różne.
Rozwiązanie na str. 3

M 384. Liczbę całkowitą m taką, że $|x-m| < 1$ nazwiemy zaokrągleniem liczby rzeczywistej x. (Gdy x nie jest całkowite, mamy dwa zaokrąglenia: $[x]$ i $[x]+1$.) Wykazać, że każdą z n liczb $x_1, \ldots, x_n$ można zaokrąglić tak, że suma dowolnego podzbioru zbioru $\{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie się różnić od sumy wybranych zaokrągleń liczb najwyżej o $\frac{n+1}{4}$.
Rozwiązanie na str. 3

M 385. Wykazać, że $99999+100000\sqrt{3}$ nie jest kwadratem liczby postaci $a+b\sqrt{3}$, gdzie a i b są całkowite.
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 163. Na poziomej gładkiej powierzchni znajduje się sztywny, jednorodny pręt o długości L poddany działaniu sił F_1 i F_2 (rysunek). Jaka siła (naprężenie) działa w przekroju odległym o H od końca pręta?

Tym razem wraz z treścią podajemy kilka wyników, a wśród nich prawidłowy. Zadaniem Czytelników jest wskazanie go bez uciekania się do rozwiązywania problemu.

a) $N = \left(\frac{H}{L}\right)^2 (F_1+F_2)-F_2$, b) $N = \frac{H}{L}(F_1+F_2)-F_1$,

c) $N = H(F_1+F_2)-LF_2$, d) $N = \frac{H}{L}(F_1+F_2)-F_2$,

e) $N = \left(\frac{H}{L}\right)^2 F_1 - \left(1-\frac{H}{L}\right)^2 F_2$

(N jest siłą, z jaką element A działa na B).
Rozwiązanie na str. 6