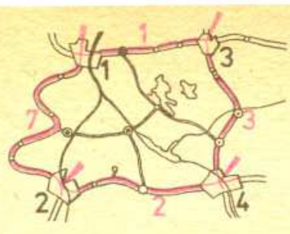

Najkrótsza droga

Mamy pewien zbiór miast i sieć łączących je dróg. Niech n oznacza liczbę miast, a l_{ij} długość drogi łączącej bezpośrednio miasto i z miastem j ($l_{ii} = 0$); jeżeli między tymi miastami nie biegnie droga, przyjmiemy $l_{ij} = \infty$. Pokażemy dwie metody obliczania długości najkrótszego połączenia drogowego dwóch dowolnych miast; dla miasta i oraz miasta j oznaczymy ją przez c_{ij}.

Przykład
Rozważmy cztery miasta połączone drogami tak, jak to przedstawiono na rysunku.

Metoda 1 (Warshalla)

polega na obliczaniu długości c^k_{ij} najkrótszego połączenia miast i oraz j takiego, że przechodzi ono jedynie przez miasta o numerach nie większych niż k.

Algorytm

1. dla każdej pary miast (i, j) przyjmij $c^0_{ij} = l_{ij}$,
2. dla kolejnych liczb k z przedziału $[1, n]$ i dla każdej pary miast (i, j), przyjmij $c^k_{ij} = min(c^{k-1}_{ij}, c^{k-1}_{ik} + c^{k-1}_{kj})$,
3. dla każdej pary miast (i, j) przyjmij $c_{ij} = c^n_{ij}$,
4. koniec algorytmu.

Algorytm Warshalla buduje następujące tabelki wartości c^k_{ij}.

c^0_{ij}	1	2	3	4
1	0	7	1	∞
2	7	0	∞	2
3	1	∞	0	3
4	∞	2	3	0

c^1_{ij}	1	2	3	4
1	0	7	1	∞
2	7	0	8	2
3	1	8	0	3
4	∞	2	3	0

c^2_{ij}	1	2	3	4
1	0	7	1	9
2	7	0	8	2
3	1	8	0	3
4	9	2	3	0

c^3_{ij}	1	2	3	4
1	0	7	1	4
2	7	0	8	2
3	1	8	0	3
4	4	2	3	0

c^4_{ij}	1	2	3	4
1	0	6	1	4
2	6	0	5	2
3	1	5	0	3
4	4	2	3	0

Metoda 2 (Dijkstry)

polega na konstruowaniu podzbioru S zbioru wszystkich miast takiego, że najkrótsze połączenie pewnego miasta i z każdym miastem ze zbioru S przebiega przez miasta ze zbioru S. Długość takiego połączenia dla miast i oraz j oznaczymy przez d_{ij}.

Algorytm

1. dla każdej pary miast (i, j) przyjmij $d_{ij} = l_{ij}$,
2. weź $i = 0$,
3. weź kolejną liczbę naturalną i; jeżeli $i > n$: koniec algorytmu.
4. przyjmij $S = \{i\}$,
5. jeżeli $S = \{1, 2, ..., n\}$, przyjmij $c_{ik} = d_{ik}$, dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ i wykonaj 3.
6. jeżeli $S \neq \{1, 2, ..., n\}$, wykonaj:
   a. ze zbioru $\{1, 2, ..., n\} - S$ wybierz miasto j, dla którego d_{ij} jest najmniejsze i przyjmij $S = S \cup \{j\}$,
   b. dla każdego $k \in \{1, 2, ..., n\} - S$ przyjmij $d_{ik} = min(d_{ik}, d_{ij} + l_{jk})$ i wykonaj 5.

Algorytm Dijkstry buduje następujące zbiory S i tabelki wartości d_{1j}.

$S = \{1\}$

j	1	2	3	4
d_{1j}	0	7	1	∞

$S = \{1, 3\}$

j	1	2	3	4
d_{1j}	0	7	1	4

$S = \{1, 3, 4\}$

j	1	2	3	4
d_{1j}	0	6	1	4

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

j	1	2	3	4
c_{1j}	0	6	1	4

Pozostawiamy Czytelnikowi prześledzenie działania algorytmu Dijkstry dla pozostałych miast.

Algorytmy Warshalla i Dijkstry formułuje się zwykle inaczej niż zostało to tutaj przedstawione. Działają one prawidłowo także dla dróg jednokierunkowych i dlatego rozwiązany przez nie problem można definiować ogólniej, używając pojęć z teorii grafów zorientowanych.

Oba algorytmy są niemal optymalne, gdyż liczba elementarnych operacji jest dla każdego z nich rzędu n^3. Kerr udowodnił, że każdy algorytm obliczający najkrótsze połączenie między n miastami, przy użyciu operacji dodawania i brania minimum wymaga wykonania mniej więcej n^3 elementarnych kroków.

L. B.

Aneks do artykułu
Jak kojarzyć trwałe małżeństwa

Dla danego zestawu list preferencji może istnieć wiele stabilnych układów (nawet $2^{\frac{n}{2}}$ układów). Uzyskany w algorytmie układ $U = \{(k_1, m_1), (k_2, m_2), ..., (m_n, k_n)\}$ jest optymalny dla mężczyzn. Dla dowolnego bowiem innego stabilnego $U' = \{(m_1, k'_1), (m_2, k'_2), ..., (m_n, k'_n)\}$ zachodzi $k_1 m_1 k'_1$, $k_2 m_2 k'_2, ..., k_n m_n k'_n$. Udowodnimy, że jeżeli w trakcie wykonywania algorytmu mężczyzna m wykreślił kobietę k ze swojej listy, to nie istnieje inny układ stabilny, w którym mogłaby znaleźć się para (m, k). Przypuśćmy, że tak jest aż do momentu, gdy m_0 wykreśla ze swej listy k_0 i dopiero teraz daje się utworzyć układ stabilny U' z parą (m_0, k_0). W takim przypadku w U istnieje para (m_1, k_0) taka, że $m_1 k_0 m_0$, a w U' obok (m_0, k_0) jest (m_1, k_1), dla której $k_1 m_1 k_0$(inaczej bowiem U' nie będzie stabilny). Skoro zatem w U jest (m_1, k_0) i $k_1 m_1 k_0$, to k_1 musiała być skreślona wcześniej niż k_0 z listy m_1. W tamtym momencie, wobec przyjętego na wstępie założenia, stabilny układ U' z parą (k_1, m_1) nie może istnieć.

A zatem końcowy układ jest wyznaczony jednoznacznie, niezależnie od kolejnych wyborów wolnych mężczyzn.