Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 100, 101, 102

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1985

100. Dwa koła współśrodkowe podzielono na 100 równych sektorów (każde). Na każdym z kół pewne 51 sektorów pomalowano na czerwono, a pozostałe 49 sektorów na niebiesko. Udowodnić, że można tak obrócić jedno koło względem drugiego, żeby co najmniej 52 sektory jednego koła nałożyły się na sektory drugiego o tym samym kolorze (czerwone na czerwone, niebieskie na niebieskie).

101. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma tę własność, że koła wpisane w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe promienie. Dowieść, że $ABCD$ jest prostokątem.

102. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots=(\sqrt{2})^{n-1}.$$

Scharakteryzować rozmieszczenie wszystkich takich liczb w ciągu wszystkich liczb naturalnych.

Zadanie 102 przysłał pan Krzysztof Trautman z Warszawy.

Uwaga amatorzy zadań z fizyki !
Za miesiąc rusza liga fizyczna Klubu 44.
Pierwsze zadania z fizyki w numerze 1/1985.
Również w numerze styczniowym zamieścimy obszerne omówienie ligi matematycznej oraz dłuższą tabelę ligową z kilkudziesięcioma nazwiskami.

Rozwiązania zadań z numeru 8/1984

Przypominamy treść zadań:

88. Jeden z kątów trójkąta T ma miarę 120°. Niech T' będzie trójkątem, którego wierzchołkami są punkty przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta T z przeciwległymi bokami. Dowieść, że trójkąt T' jest prostokątny.

89. Który z płaskich przekrojów sześcianu ma największe pole?

90. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ w liczbach całkowitych.

88. Oznaczmy wierzchołki trójkątów T i T' odpowiednio przez A, B, C, A', B', C'. Odcinki $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ są dwusiecznymi kątów trójkąta T, $\sphericalangle BCA=120°$. Niech $\overline{C'B''}$ będzie dwusieczną kąta $AC'C$ $(B''\in\overline{AC})$. Na mocy twierdzenia o podziale boku przez dwusieczną zachodzą proporcje: $AB':B'C=AB:BC$, $AB'':B''C=AC':C'C$. Zbudujmy na boku $\overline{BC}$ (na zewnątrz trójkąta T) trójkąt równoboczny BCD. Wówczas $\overline{BD}\,||\,\overline{C'C}$, więc $AC':C'C=AB:BD=AB:BC$. Stąd i z poprzednich proporcji wynika, że punkt B'' pokrywa się z B', czyli $\overline{C'B'}$ jest dwusieczną kąta $AC'C$. Analogicznie $\overline{C'A'}$ jest dwusieczną kąta $BC'C$. Wobec tego $\sphericalangle B'C'A'=90°$.

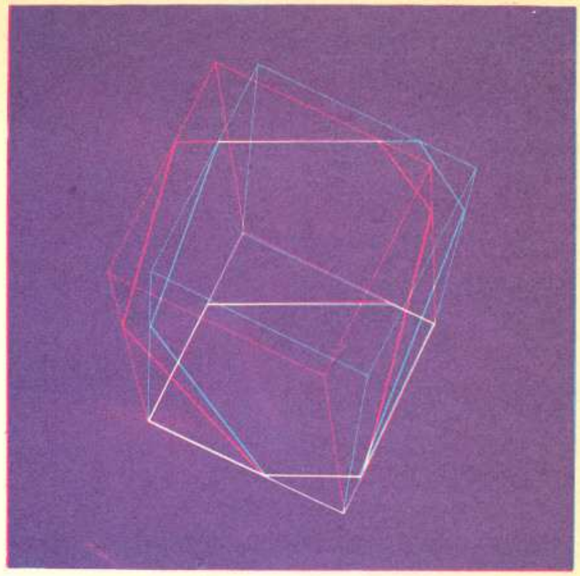
89. Wybierzmy jedną parę ścian równoległych danego sześcianu — nazwijmy je górną i dolną — i rozpatrzmy przekrój sześcianu płaszczyzną π, tworzącą z płaszczyznami tych ścian kąt φ. Niech H oznacza wielokąt powstały w przekroju sześcianu płaszczyzną π, a H' — rzut tego wielokąta na płaszczyznę ściany dolnej. H' jest częścią wspólną tej ściany oraz pasa płaszczyzny ograniczonego dwiema prostymi równoległymi, z których jedna jest krawędzią przecięcia płaszczyzny π z płaszczyzną ściany dolnej, a druga jest rzutem krawędzi przecięcia π z płaszczyzną ściany górnej (rys. 1). Odległość d między tymi prostymi, długość a krawędzi sześcianu i kąt φ związane są zależnością : $\mathrm{tg}\,\varphi=a/d$. Przy ustalonym φ — a więc i ustalonym d — obierzmy takie położenie płaszczyzny π, by pole H' było maksymalne. Obliczenie tego pola było treścią zadania ligowego **76** (rozwiązanie w numerze 6/1984); równa się ono

$$S_{max}(H')=\begin{cases} d(\sqrt{2}\,a-d/2) & \text{gdy } 0\leqslant d\leqslant a/\sqrt{2}\\ (a^2+d^2)/2 & \text{gdy } a/\sqrt{2}\leqslant d\leqslant a.\\ a^2 & \text{gdy } d\geqslant a\end{cases}$$

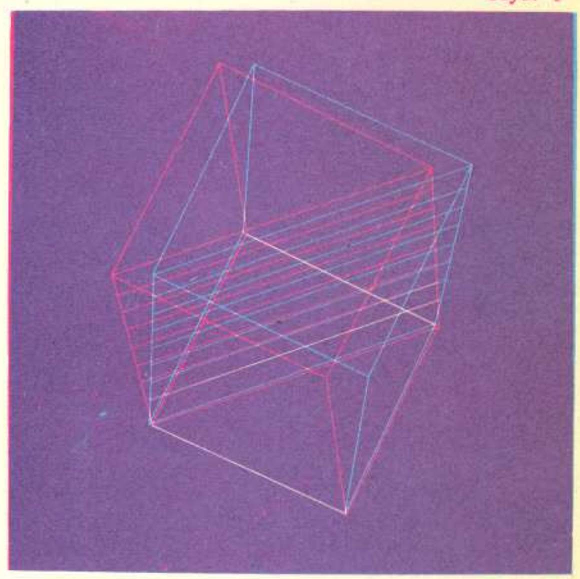
Ponieważ $S(H') = S(H)\cos\varphi$, więc przy ustalonym φ pole $S(H)$ jest maksymalne wtedy, gdy $S(H')$ jest maksymalne. Rozpatrując trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i d widzimy, że $\cos\varphi = d(a^2+d^2)^{-1/2}$.
Stąd

$$S'_{max}(H) = \begin{cases} (\sqrt{2}a - d/2)(a^2+d^2)^{1/2} & \text{gdy } 0 \leqslant d \leqslant a/\sqrt{2} \\ (2d)^{-1}(a^2+d^2)^{3/2} & \text{gdy } a/\sqrt{2} \leqslant d \leqslant a. \\ a^2d^{-1}(a^2+d^2)^{1/2} & \text{gdy } d \geqslant a \end{cases}$$

Gdy φ zmienia się od 0° do 90°, to d przebiega wartości od ∞ do 0. Obliczona wartość $S_{max}(H)$ jest funkcją ciągłą zmiennej d. Badając jej pochodną w przedziałach różniczkowalności stwierdzamy, że jest ona malejąca w $\left(0, a/\sqrt{2}\right)$, rosnąca w $\left(a/\sqrt{2}, a\right)$, malejąca w (a, ∞). Dla $d = 0$ i $d = a$ przyjmuje wartość maksymalną równą $\sqrt{2}a^2$. Odpowiada to przekrojowi sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez równoległe przekątne dwóch przeciwległych ścian (rys. 2).



Rys. 1

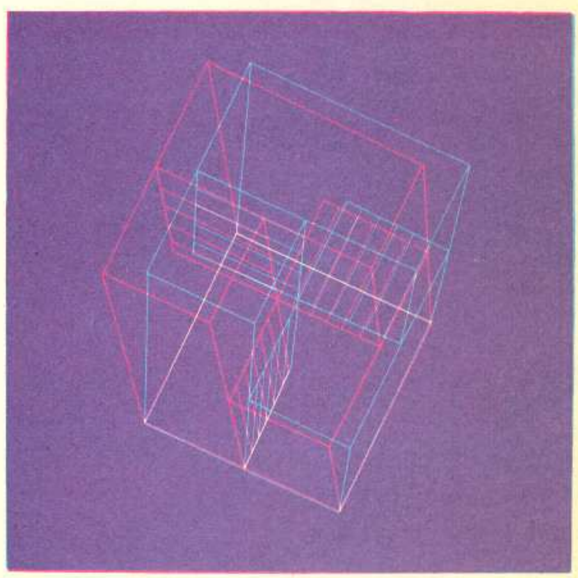


Rys. 2

90. Pokażemy, że jedynym rozwiązaniem jest $x = y = z = 0$. Załóżmy, że (x, y, z) jest rozwiązaniem różnym od $(0, 0, 0)$. Niech k będzie największą nieujemną liczbą całkowitą taką, że każda z liczb x, y, z dzieli się przez 2^k. Wówczas $x = 2^k u$, $y = 2^k v$, $z = 2^k w$ i co najmniej jedna z liczb u, v, w jest nieparzysta. Z danego równania wynika, że $u^2 + v^2 + w^2 = 4^k u^2 v^2$. Lewa strona tej równości daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1, 2 lub 3 — w zależności od tego, ile jest składników nieparzystych. Zatem $k = 0$, czyli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest nieparzysta. Gdyby x i y były obie parzyste, z musiałoby też być parzyste. Wobec tego nieparzysta jest jedna z liczb x, y i z równości $z^2+1 = (x^2-1)(y^2-1)$ wynika, że z^2+1 dzieli się przez 8 — co jest niemożliwe.

W następnym numerze *Delty* siedemnasta strona będzie już „płaska". Większość anaglifów w numerach 4–12/1984 wykonał dr Krzysztof S. Nowiński, wspomagany przez komputer PDP 11/45 z plotterem, udostępniony nam przez Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika.

Rozwiązanie konkursu *Małej Delty* z numeru 7/1984



Prawidłowe rozwiązania nadesłało 12 Czytelników.

W wyniku losowania nagrody otrzymali

Daniel Zdunek z Otwocka

i Zbigniew Śliwa z Kamiennej Góry.

Nagrody zostały wysłane pocztą.