Jak kojarzyć trwałe małżeństwa — przykład algorytmu

Oto przykładowe listy preferencji dla $\mathscr{M} = \{A, B, C, D, E\}$ i $\mathscr{K} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

A	2 5 1 3 4	1	E A D B C
B	1 2 3 4 5	2	D E B A C
C	2 3 5 4 1	3	A D B C E
D	1 3 2 4 5	4	C B D A E
E	5 3 2 1 4	5	D B C E A

Dane są dwa n-elementowe zbiory — zbiór kobiet $\mathscr{K}$ i zbiór mężczyzn $\mathscr{M}$. Każdemu elementowi przypisana jest pewna lista preferencji. Wyjaśnimy to pojęcie na przykładzie wybranej kobiety $k \in \mathscr{K}$. Przypisana do k lista jest to pewna permutacja wszystkich elementów zbioru $\mathscr{M}$. Jeżeli mężczyzna m_1 znajduje się wyżej na liście preferencji kobiety k niż mężczyzna m_2, to piszemy $m_1 k m_2$.

Należy mężczyzn i kobiety ze zbiorów $\mathscr{M}$ i $\mathscr{K}$ połączyć w pary tak, aby kobieta k_1 i mężczyzna m_2 z dwóch różnych par (m_1, k_1) i (m_2, k_2) nie cenili wyżej (w sensie swych list preferencji) siebie nawzajem niż swych aktualnych partnerów. Układ spełniający powyższy warunek nazywamy stabilnym.

Najprostszy możliwy algorytm — przeglądanie po kolei wszystkich układów par i wybieranie układów stabilnych — jest mało efektywny. Wszystkich układów par jest przecież $n!$. Nie wiemy w dodatku, czy układ stabilny zawsze istnieje.

(A,1) (B,3), (C,2), (D,4), (E,5) $\xrightarrow{(A,2)}$
(A,2), (B,3), (C,1), (D,4), (E,5) $\xrightarrow{(B,2)}$
(A,3), (B,2), (C,1), (D,4), (E,5) $\xrightarrow{(B,1)}$
(A,3), (B,1), (C,2), (D,4), (E,5) $\xrightarrow{(A,1)}$
(A,1), (B,3), (C,2), (D,4), (E,5) !!!
Algorytm zapętla się.

Metoda polegająca na uzyskiwaniu układu stabilnego przez wymianę partnerów w parach powodujących niestabilność również nie zawsze daje pozytywne rezultaty (patrz obok). Skonstruujemy algorytm, w którym po drodze będą występować tylko układy stabilne, ale niekoniecznie pełne, tzn. nie wszyscy mężczyźni (i nie wszystkie kobiety) muszą być połączeni w pary. Algorytm rozpocznie swoje działanie od najprostszego układu stabilnego — zbioru pustego, następnie będzie z układu stabilnego otrzymywał inny układ stabilny, aż dojdzie do układu pełnego.

Do budowy algorytmu użyjemy operacji *oświadcza się*. Dla dowolnego $k \in \mathscr{K}$ i $m \in \mathscr{M}$ operacja *m oświadcza się k* wykonywana jest w następujący sposób:

Jeżeli kobieta k jest wolna, to tworzy się para (m, k). W przeciwnym przypadku kobieta dokonuje wyboru tego mężczyzny, spośród m i aktualnego partnera, który znajduje się wyżej na jej liście preferencji. Jednocześnie k zostaje skreślona z listy preferencji odrzuconego mężczyzny. Wybrany mężczyzna tworzy parę z kobietą k, a odrzucony staje się wolny.

Algorytm
dopóki istnieje wolny mężczyzna, wykonuj:
1. wybierz dowolnego wolnego mężczyznę m,
2. wykonaj *m oświadcza się k*, dla k znajdującej się aktualnie najwyżej na liście preferencji m.

koniec algorytmu

Spróbujcie zastosować ten algorytm do podanego na marginesie przykładowego zestawu list preferencji. Nietrudno zauważyć, że każdemu wykreśleniu kobiety z którejś z list towarzyszy wybór jednego z dwóch mężczyzn. W ten sposób kobieta dobiera sobie coraz lepszego partnera. Czy algorytm zatrzyma się kiedykolwiek? Tak. Każdy mężczyzna oświadcza się danej kobiecie tylko raz, a więc w najgorszym przypadku musi nastąpić moment, kiedy na liście preferencji mężczyzny m pozostanie już tylko jedna kobieta k. Inne kobiety muszą więc mieć partnerów. Kobieta k jest zatem wolna. Wykonanie operacji *m oświadcza się k* utworzy ostatnią parę (m, k). Algorytm zatrzymuje się. Tylko n operacjom *oświadcza się* nie towarzyszy skreślenie kobiety z listy preferencji, a więc algorytm zatrzyma się po co najwyżej $n + (n-1)^2$ krokach.

Pokażemy, że kolejne układy otrzymywane w algorytmie są stabilne. Rozpatrzmy pewien układ stabilny przed zakończeniem działania naszego algorytmu w momencie tworzenia pary (m, k). Dla mężczyzny m z pary (m, k) może istnieć kobieta k_1 taka, że $k_1 m k$. Ponieważ m oświadczał się kolejno kobietom według własnej listy preferencji, to k_1 musiała być z niej wykreślona. Zdarzyć się to mogło jednak tylko wtedy, gdy k_1 znalazła lepszego partnera niż m. Zatem utworzenie pary (m, k) nie narusza stabilności i operacja *oświadcza się* zachowuje stabilność całego układu. Układ początkowy (układ pusty) był stabilny, tak więc wszystkie kolejne układy, łącznie z końcowym (pełnym), są stabilne.

Opisany tutaj algorytm zakończy się w skończonej liczbie kroków i utworzy stabilny układ par. Czy jest to jednak jedyny taki układ? Zauważmy, że w algorytmie wybieramy *pewnego* wolnego mężczyznę (pozwala to ominąć szczegóły techniczne w opisie algorytmu). Czy końcowy układ zależy od kolejnych wyborów? Czy otrzymany układ preferuje którąś ze stron? Odpowiedź w numerze.

dr Wojciech RYTTER

Rozwiązanie zadania F 163.
1. Rozwiązanie c) odrzucamy, bo wymiar prawej strony równania nie jest wymiarem siły.

2. Wartość poszukiwanego naprężenia nie powinna zmieniać się przy równoczesnej zamianie F_1 na $-F_2$ i H na $L-H$, co odpowiada obrotowi o 180° wokół osi pionowej przechodzącej przez oś symetrii pręta. Warunku tego nie spełnia rozwiązanie a).

3. Na końcach pręta naprężenia muszą być równe odpowiednio F_1 i F_2, co eliminuje rozwiązanie b).

4. Gdy pręt poddany jest działaniu równych co do wartości sił, naprężenie w każdym punkcie pręta jest stałe i równe sile zewnętrznej. Rozwiązanie c) nie spełnia tego warunku.

Ponieważ jedno z rozwiązań jest prawidłowe, musi nim być rozwiązanie d).