... obu za słowo ująłem,
Iż będą strzelali się przez niedźwiedzią skórę.
Szlachta w krzyk: „To śmierć pewna! prawie rura w rurę"!
A ja w śmiech, bo mnie uczył mój przyjaciel Maro,
Że skóra zwierza nie jest ladajaką miarą.
Wszak wiecie Waćpanowie, jak królowa Dydo
Przepłynęła do Libów i tam z wielką biédą
Wytargowała sobie taki ziemi kawał,
Któryby się wołową skórą nakryć dawał;
Na tym kawałku ziemi stanęła Kartago!
Więc ja to sobie w nocy rozbieram z uwagą.
„Ledwie dniało, już z jednej strony taradejką
Jedzie Doweyko, z drugiej na koniu Domeyko.
Patrzą, aż tu przez rzekę leży most kosmaty,
Pas ze skóry niedźwiedziej, porzniętej na szmaty.
Postawiłem Doweykę na zwierza ogonie
Z jednej strony, Domeykę zaś po drugiej stronie.
„Pukajcie teraz, rzekłem, choć przez całe życie,
Lecz póty was nie spuszczę, aż się pogodzicie".
Oni w złość; a tu szlachta kładnie się na ziemi
Od śmiechu, ...

Adam Mickiewicz, *Pan Tadeusz*, księga IV — *Dyplomatyka i łowy*, ww. 974—994

Mitologia i twierdzenie izoperymetryczne

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Przenieśmy się na chwilę w świat mitologii. Około roku 814 p.n.e. Dydona — córka królewska, ratując swoje życie ucieka z fenickiego miasta Tyru do Afryki (nie zapominając zabrać kosztowności). Tam na północnym brzegu Afryki od Jarba — króla Numidii — kupuje „tyle ziemi, ile można opasać skórą zdjętą z wołu". Ku zdumieniu Jarba tnie skórę wołu na wąskie paski i opasuje nimi obszar ziemi w kształcie półkola przyległego do brzegu morskiego. W miejscu tym zakłada miasto Kartaginę. Tyle mitologia. Powstaje pytanie: czy Dydona wybierając takie rozwiązanie zagarnęła możliwie największy obszar? (Dla uproszczenia przyjmijmy brzeg morski za linię prostą).

Zasadniczym etapem naszych rozważań będzie rozwiązanie tzw. problemu izoperymetrycznego: która wśród wszystkich figur płaskich o danym obwodzie ma największe pole powierzchni? Proste jest stwierdzenie: figura będąca rozwiązaniem problemu izoperymetrycznego jest wypukła. Po tej uwadze problem izoperymetryczny formułujemy tak: wśród wszystkich figur wypukłych o danym obwodzie znaleźć tę, która ma największe pole powierzchni.

Odpowiedź — koło — znana była już w starożytnej Grecji (Archimedes i Zenodorus), a prawdopodobnie wcześniej w Babilonii. Jednak historia świadczy, że matematyk szwajcarski Jakub Bernoulli w roku 1697 jako pierwszy rozwiązał ten problem i to w ogólniejszym przypadku. W ponad sto lat później geometra szwajcarski Jakub Steiner podał aż pięć różnych rozwiązań. Podobnie jak jego wielki poprzednik popełnił on jednak pewną nieścisłość przyjmując za oczywisty fakt istnienie figury o największym polu powierzchni (w zbiorze figur o ustalonym obwodzie). Uzupełnienie dowodu we wskazanym kierunku podał w 1882 r. F. Edler.

O konieczności uzasadnienia tego „oczywistego" faktu świadczy rozwiązanie zadania przypominającego zagadnienie izoperymetryczne:
Wśród wszystkich figur wypukłych o obwodzie mniejszym od $L > 0$ znaleźć figurę o najmniejszym polu.
Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie małą liczbą rzeczywistą. Dla każdej figury wypukłej o obwodzie $L_1 = L - \varepsilon$ można znaleźć figurę wypukłą podobną do wyjściowej o obwodzie $L_2 = L - \frac{\varepsilon}{2} > L_1$, której pole jest większe od pola figury poprzedniej. Zatem tak postawione zagadnienie nie ma rozwiązania.

Termin *izoperymetryczny* jest pochodzenia greckiego — od słów *isos* (jednakowo) i *perimetro* (mierzę dookoła). Wprowadzony został przez greckiego filozofa Synezjusza. Współcześnie wyraz ten jest synonimem stwierdzenia „przy ustalonym obwodzie".

Dowód tego, iż rozwiązaniem problemu izoperymetrycznego jest koło, rozbijemy na dwa etapy. Najpierw korzystając z twierdzeń o ciągach figur wypukłych (patrz np. I. M. Jagłom i W. G. Bołtiański „Figury wypukłe") udowodnimy, że w zbiorze figur wypukłych o ustalonym obwodzie istnieje figura o największym polu. Następnie wiedząc już o istnieniu takiej figury pokażemy, że musi nią być koło.

Rozważmy rodzinę $\mathscr{F}$ wszystkich figur wypukłych o obwodzie L zawartych w ustalonym kole o promieniu L (każdą figurę wypukłą o obwodzie L możemy tak przesunąć, by znalazła się w tym kole). Niech P będzie zbiorem liczb — pól powierzchni figur z rodziny $\mathscr{F}$.

$$P = \{p(\Phi) : \Phi \in \mathscr{F}\},$$

gdzie $p(\Phi)$ oznacza pole figury Φ. Zbiór P jest oczywiście ograniczony z góry (np. przez πL^2). Oznaczmy przez M kres górny zbioru P. Mamy znaleźć figurę $\Phi \in \mathscr{F}$ o polu równym M.

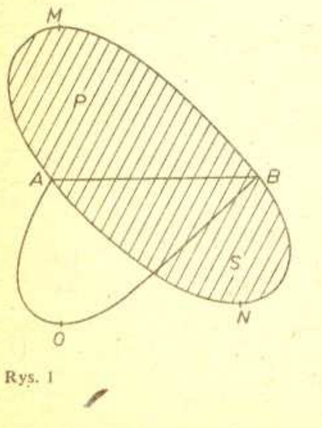
Wybierzmy figury $\Phi_n \in \mathscr{F}$ o polach $p(\Phi_n) \geqslant M - \frac{1}{n}$.

Zachodzi
Twierdzenie. Z ciągu krzywych ograniczających figury wypukłe i zawartych w ustalonym kole można wybrać podciąg zbieżny. Granica jest punktem, odcinkiem lub ogranicza obszar wypukły. Długość krzywej granicznej jest granicą długości krzywych, a pole figury przez nią ograniczanej jest granicą pól odpowiednich figur.

Z naszego ciągu Φ_n wybieramy podciąg zbieżny do pewnej figury Φ_0. Obwód tej figury jest równy L, a pole M.
Tak więc każda (niekoniecznie wypukła) figura o obwodzie L ma pole nie większe od figury Φ_0. Pokażemy teraz, że figura Φ_0 musi być kołem. Dowód rozbijemy na kilka lematów.

Lemat 1. Każda cięciwa połowiąca obwód figury Φ_0 połowi jej pole.

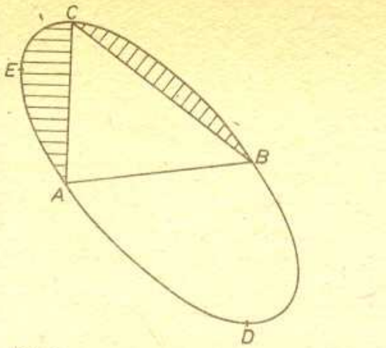
Załóżmy, że krzywa $ANBMA$ ogranicza figurę Φ_0 i że cięciwa AB (rys. 1) dzieli tę krzywą na dwie części o jednakowej długości. Jeżeli powierzchnia P ograniczona krzywą $AMBA$ jest większa od powierzchni S ograniczonej konturem $ABNA$, to wówczas zastępując krzywą ANB przez krzywą AOB symetryczną do krzywej AMB względem cięciwy AB otrzymujemy nową figurę $AMBOA$ o obwodzie L, lecz o polu powierzchni większym od M (bo $2P > P+S = M$), co jest sprzeczne z założeniem. Zatem musi być $P = S$.



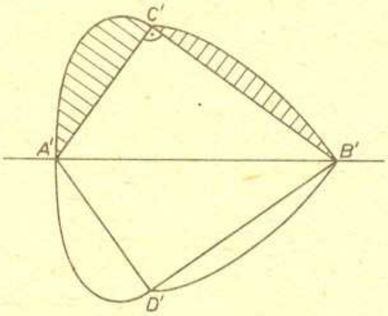
Rys. 1

Lemat 2. Spośród wszystkich trójkątów o danych dwóch bokach największą powierzchnię ma trójkąt, w którym boki te są prostopadłe.

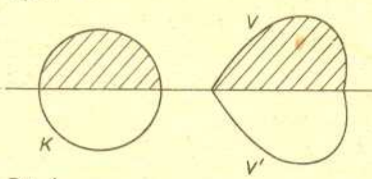
Lemat wynika ze wzoru na pole powierzchni trójkąta $M(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$, gdzie $0 < \gamma < \pi$ jest miarą łukową kąta zawartego między bokami a i b.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Lemat 3. Każda cięciwa połowiąca obwód figury Φ_0 jest widziana z każdego punktu leżącego na brzegu (różnego od końców cięciwy) pod kątem prostym.

Załóżmy, że AB jest cięciwą figury Φ_0 (ograniczonej krzywą $AECBD$ — rys. 2), która połowi jej obwód i którą widać z punktu C (należącego do brzegu) pod kątem różnym od prostego. Zbudujmy taki trójkąt prostokątny $A'\,B'\,C'$, że $AC = A'\,C'$ i $BC = B'\,C'$, C' jest wierzchołkiem kąta prostego (rys. 3). Punkty A' i C' oraz B' i C' łączymy odpowiednio krzywymi przystającymi do krzywych AC i BC. Z lematu 2 pole powierzchni trójkąta $A'\,B'\,C'$ jest większe od pola powierzchni trójkąta ABC, wobec czego pole powierzchni figury ograniczonej konturem $A'\,B'\,C'\,A'$ jest większe od pola powierzchni ograniczonej konturem $ABCEA$. Jeżeli teraz do figury $A'\,B'\,C'\,A'$ dodamy figurę symetryczną względem $A'\,B'$, to otrzymamy figurę $A'\,C'\,B'\,D'\,A'$ o tym samym obwodzie co figura wyjściowa, ale o większej powierzchni, co jest sprzeczne z założeniem o Φ_0.

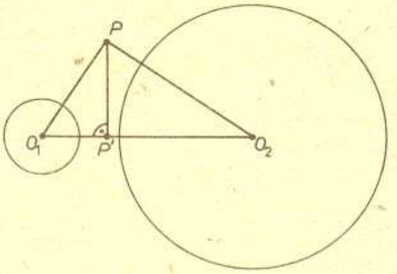
Z lematu 3 wynika, że brzeg figury Φ_0 jest miejscem geometrycznym punktów, z których widać dany odcinek (cięciwę połowiącą obwód Φ_0) pod kątem prostym, a więc, że figura Φ_0 jest kołem o promieniu $r = \frac{L}{2\pi}$.

Rozwiązanie problemu izoperymetrycznego na płaszczyźnie daje nam odpowiedź na pytanie postawione we wstępie. Weźmy pod uwagę półkole o łuku długości L i dowolną figurę V ograniczoną odcinkiem prostej i łukiem o długości L (rys. 4). Przekształćmy te figury przez symetrię względem prostoliniowych odcinków, które je ograniczają. Otrzymujemy wówczas koło K i figurę V', której pole powierzchni jest dwa razy większe od pola powierzchni figury V. Figury K i V' są izoperymetryczne, a więc na podstawie wykazanego twierdzenia pole powierzchni figury V' jest mniejsze niż pole powierzchni koła K, a zatem i pole powierzchni figury V jest mniejsze od pola powierzchni półkola.

Na zakończenie uwaga. Problem izoperymetryczny można również postawić w przestrzeni trójwymiarowej: wśród wszystkich brył ograniczonych powierzchniami o ustalonym polu T znaleźć bryłę o największej objętości. Jego rozwiązanie — kula o promieniu $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$ — podał w 1890 roku matematyk niemiecki Hermann Schwarz (1843—1921).

Prosta potęgowa

Zbiór punktów mających taką samą potęgę względem dwóch okręgów tworzy prostą, którą nazywamy potęgową, lub jest pusty.
Oto dowód:



Oznaczmy promienie okręgów przez r_1, r_2 i odległość ich środków O_1 i O_2 przez p. Wykażemy, że rzut prostokątny P' dowolnego punktu P o jednakowych potęgach względem obu okręgów na $O_1\,O_2$ nie zależy od wyboru punktu P. To wystarczy (prawda?). Oznaczmy jeszcze odległości P od O_1 i O_2 przez d_1 i d_2.
Mamy więc

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

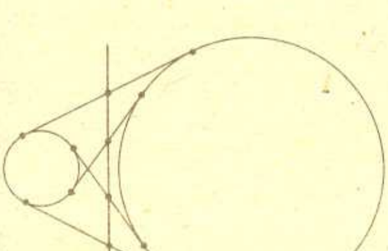
Obliczmy na dwa sposoby odległość PP':

$$d_1^2 - (O_1P')^2 = (PP')^2 = d_2^2 - (O_2P')^2.$$

Mamy stąd

$$(O_2P')^2 - (O_1P')^2 = d_2^2 - d_1^2 = r_2^2 - r_1^2$$

i dalej



$$(p-(O_1P'))^2 - (O_1P')^2 = r_2^2 - r_1^2,$$
$$p(p-2(O_1P')) = r_2^2 - r_1^2,$$
$$O_1P' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{r_2^2 - r_1^2}{p}\right).$$

Zatem położenie punktu P' zależy tylko od r_1, r_2 i p, a więc nie zależy od wyboru punktu P, co kończy dowód (bo zbiór pusty otrzymamy dla $p^2 - r_2^2 + r_1^2 < 0$ — jak to wygląda na rysunku?).

Prosta potęgowa dzieli każdą wspólną styczną okręgów na połowy — Czytelnik może to łatwo sam sprawdzić (nam ta informacja nie jest dalej potrzebna).