$\otimes\sqrt{\Sigma !} = 44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 4/1984

Tomasz Komorowski	- Świdnik	50,09pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	49,68pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	48,74pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	47,71pkt
Józef Siwy	- Łaziska Grn	45,96pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	45,74pkt
Wojciech Olszewski	- Brwinów	45,49pkt

Współczynniki trudności zadań 82, 83, 84:
2,90 1,80 1,86

Cała siedmioosobowa czołówka składa się tym razem z uczestników przekraczających linię 44: panowie Gałecki i Kamiński już po raz trzeci /zostając Weteranami/, pan Orzechowski po raz drugi, pozostali po raz pierwszy, powiększając tym samym liczbę członków Klubu do 24.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 97, 98, 99

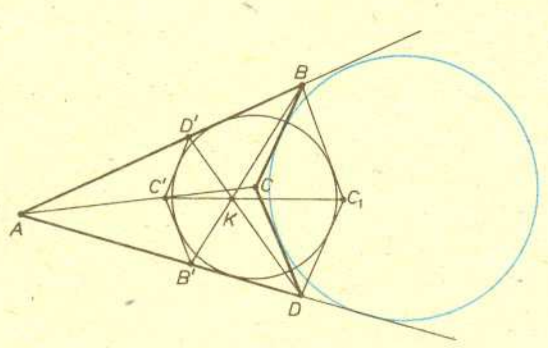
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1985

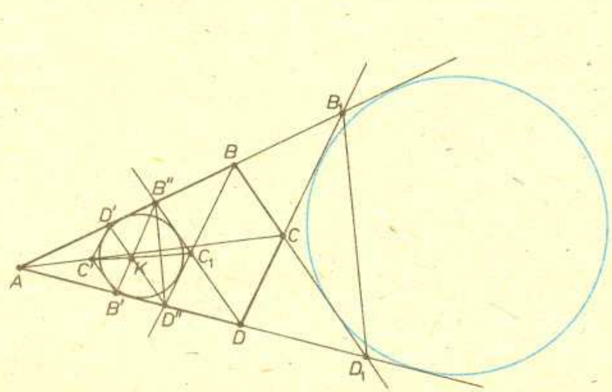
97. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że każda liczba x z przedziału $0 < x < 1$ ma całkowitą wielokrotność kx spełniającą warunek: $n^2(n+1)^{-1} \leqslant kx < n$.

98. Ciąg (x_n) dany jest wzorem rekurencyjnym $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (\sqrt{1+x_n^2}-1)/x_n$. Uzasadnić istnienie i znaleźć wartość granicy $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n x_n$.

99. Na płaszczyźnie dany jest odcinek $\overline{AB}$ o długości c. Wyznaczyć wszystkie możliwe położenia punktu C, przy których odcinek $\overline{AB}$ jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC oraz spełnione są nierówności $h_a \leqslant a$, $h_b \leqslant b$, $h_c \leqslant c$ (jak zwykle, h_a oznacza długość wysokości opuszczonej na bok a itd.)

Zadanie 99 przysłał pan Jerzy Milczarek z Gorzowa Wielkopolskiego.





Teraz z twierdzenia Talesa mamy współliniowość punktów A, C', C, a jednokładność o środku A i stosunku $AC : AC'$ przeprowadza okrąg wpisany w czworokąt ABC_1D na okrąg dopisany do czworokąta $ABCD$.

A teraz przypadek, gdy czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Wprowadzając dodatkowe oznaczenia, jak na rysunku, uzyskujemy jak poprzednio

$$\frac{B'C'}{B''C_1} = \frac{C'D'}{C_1D''},$$

nie można jednak tak prosto uzyskać współliniowości punktów A, C', C. Ale można. Z twierdzenia Talesa mamy bowiem

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AD}{AD_1} \quad \text{i} \quad \frac{AD''}{AD} = \frac{AB}{AB_1},$$

skąd

$$\frac{AB''}{AD''} = \frac{AB_1}{AD_1},$$

a więc $B''D''$ i B_1D_1 są równoległe i trójkąty $B''C_1D''$ i D_1CB_1 są podobne. Mamy więc

$$\frac{D_1C}{CB_1} = \frac{B''C_1}{C_1D''} = \frac{B'C'}{C'D'}$$

i (znów z Talesa) punkty A, C', C są współliniowe. A koniec dowodu jak w poprzednim przypadku.