

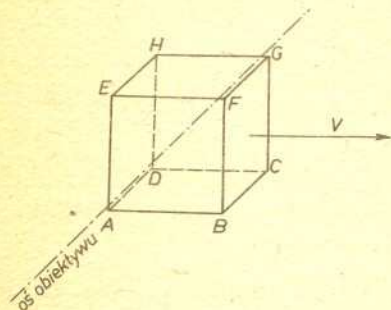
# Jak wyglądają szybko poruszające się ciała?

Artur Konrad EKERT

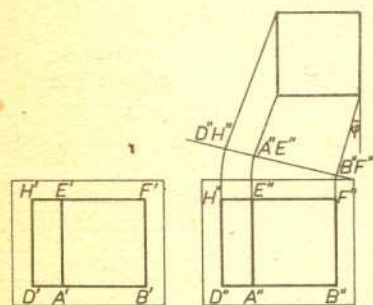
Problem sformułowany w tytule należy nieco uściślić. Załóżmy, że fotografujemy obiekt poruszający się po linii prostej ze stałą prędkością  $v$ , porównywalną z prędkością światła  $c$ , interesuje nas odpowiedź na pytanie — jaki kształt obiektu ujrzymy na fotografii. Zaczniemy od stosunkowo prostego przykładu, który wprowadzi nas w istotę tematu i, być może, zrewiduje naszą intuicję.

## Poruszający się sześcian

Sześcian o boku  $a$  porusza się wzdłuż prostej ze stałą prędkością  $v$ . Zdjęcie wykonane jest w chwili, gdy sześcian mija oś obiektywu (oś obiektywu jest prostopadła do jednej ze ścian — rysunek 1). Zaniedbujemy rozmiary kątowe obiektu (np. sześcian jest bardzo daleko). Kształt zarejestrowany na kliszy będzie wynikiem współistnienia dwóch efektów: skrócenia sześcianu w kierunku ruchu o czynnik  $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  (skrócenie Lorentza) i zjawiska pozwalającego zarejestrować na kliszy ścianę  $ADHE$  („efekt optyczny”). Promienie z tej ściany muszą wystartować wcześniej, by dotrzeć do kliszy razem z promieniami ze ściany  $ABFE$  (jest to warunek powstania obrazu). Daje to sześcianowi czas na „usunięcie się z drogi” promieniom z  $ADHE$ . Otrzymany obraz przedstawia rysunek 2a. Możemy obliczyć długość zaznaczonych odcinków.



Rys. 1



Rys. 2a

Rys. 2b

$$A'B' = a \cdot \frac{1}{\gamma}, \quad A'D' = \frac{a}{c} \cdot v = a \cdot \beta,$$

gdzie  $\beta = \frac{v}{c}$ , a promienie z krawędzi  $DH$  startują  $\frac{a}{c}$  wcześniej niż promienie ze ściany  $ABFE$ .

Rysunek 2b przedstawia fotografię spoczywającego sześcianu w przypadku, gdy oś obiektywu tworzy kąt  $\varphi$  z normalną do  $ABFE$ . Mamy

$$A''B'' = a \cos \varphi, \quad A''D'' = a \sin \varphi.$$

Ze względu na podobieństwo 2a i 2b szukamy związku między nimi. Chcielibyśmy, aby  $A'B' = A''B''$  i  $A'D' = A''D''$  — jest to możliwe, gdy  $\sin \varphi = \beta$  i  $\cos \varphi = \frac{1}{\gamma}$ .

Możemy już sformułować nieco zaskakujący wniosek, że (przy przyjętych założeniach) fotografia sześcianu poruszającego się z prędkością  $v = \beta \cdot c$  jest identyczna z fotografią sześcianu spoczywającego, fotografowanego pod kątem  $\varphi$  takim, że  $\sin \varphi = \beta$ .

## Małe uogólnienie

Poprzedni wniosek można uogólnić na obiekty dowolnego kształtu. Można pokazać (np. posługując się regułą dodawania prędkości zgodną ze szczególną teorią względności), że promień świetlny wysłany w układzie obiektu pod kątem  $\Theta'$  (kąt mierzymy teraz od kierunku prędkości ruchu) będzie zaobserwowany przez spoczywającego obserwatora pod kątem  $\Theta$  takim, że

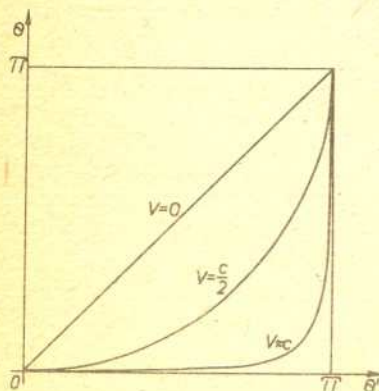
$$\sin \Theta = \frac{\sin \Theta'}{(1 + \beta \cos \Theta')}.$$

Zależność między  $\Theta$  i  $\Theta'$  przedstawia wykres na rysunku 3. Tak więc przy przyjętych na wstępie założeniach fotografia np. szybko jadącego porsche fotografowanego pod kątem  $\Theta$  jest identyczna z fotografią stojącego porsche zrobioną pod kątem  $\Theta'$ . Gdybyśmy filmowali jazdę naszego samochodu, wydawałoby się nam, że w trakcie jazdy obraca się on o kąt  $\Theta' - \Theta$  ( $\Theta'$  i  $\Theta$  zależałyby od czasu). Rysunek 4 pokazuje, jak to wygląda w przypadku sześcianu  $ABCDEFGH$  (prawa część rysunku odpowiada mniejszej prędkości). Zauważmy przy okazji, że dla

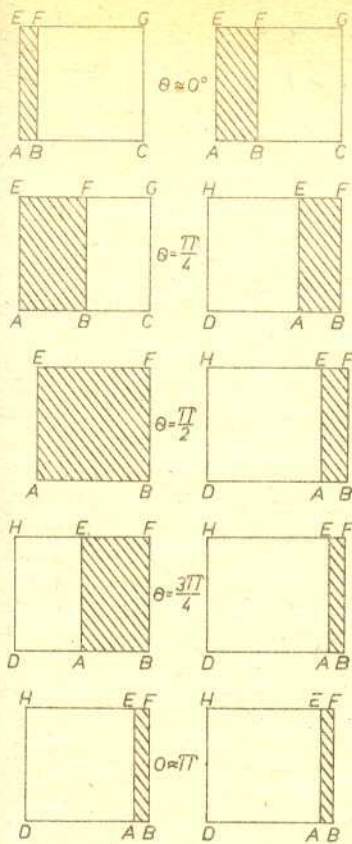
$$\Theta = \frac{\pi}{2} \text{ mamy}$$

$$\sin \Theta' = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\gamma (1 - \beta \cos \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\gamma}, \quad \sin \varphi = \sin (\Theta' - \Theta) = \beta,$$

co zgadza się z naszymi wcześniejszymi obliczeniami.



Rys. 3



Rys. 4

## Duże uogólnienie

Chcielibyśmy teraz opuścić poczynione na wstępie założenia. W tym celu rozważmy dwa inercjalne układy  $K'$  i  $K$ . Układ  $K$  porusza się z prędkością  $-v$  względem  $K'$ . Zdarzenia  $(0, 0, 0, 0)$  w obu układach pokrywają się. Obserwatorzy rejestrują (np. na sferycznej kliszy) w chwili  $t = 0 = t'$  obraz otoczenia, a obie klisze umieszczone są w początkach układów  $K$  i  $K'$ . Zdarzenie  $P = (t', x', y', z')$  zostanie zarejestrowane na kliszy obserwatora  $K'$  tylko wtedy, gdy

$$t' = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{c}$$

(promienie padają na kliszę w chwili  $t = 0$ ), co jest równoważne warunkowi  $s^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$  i odpowiada rejestracji zdarzeń ze stożka przeszłości. Warunek  $s^2 = 0$  jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a więc jeśli zdarzenie  $P$  jest zarejestrowane na kliszy  $K'$ , to również jest zarejestrowane na kliszy  $K$ . Korzystając ze wzorów opisujących transformację Lorentza

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z' \quad \text{i} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

oraz warunku rejestracji zdarzeń  $ct' = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$  budujemy transformację  $(x', y', z') \leftrightarrow (x, y, z)$ . Otrzymujemy związek

$$x = \gamma(x' - \beta\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}), \quad y = y', \quad z = z'.$$

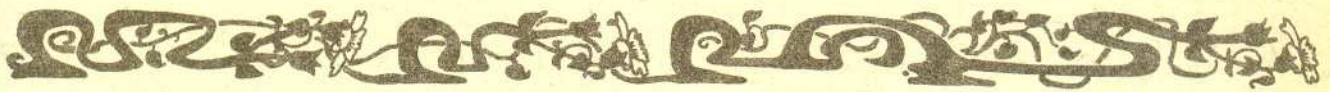
To w zasadzie cała wiedza o zmianie kształtu fotografowanych obiektów poruszających się z dużymi prędkościami. Sposób postępowania jest taki: obiekty w układzie  $K'$  składające się z punktów  $(x', y', z')$  po rzutowaniu na kliszę dają jakiś obraz, jeśli chcemy wiedzieć, jaki będzie obraz na kliszy  $K$ , to transformujemy  $(x', y', z') \leftrightarrow (x, y, z)$  i otrzymamy obiekty w układzie  $K$  złożone z punktów  $(x, y, z)$ , następnie rzutujemy je na kliszę  $K$  i to wszystko! Zauważmy, że nasza transformacja mówi więcej o kształcie obiektu niż obraz fotograficzny — w wyniku rzutowania na kliszę zaniedbujemy część informacji dotyczącej tylnej strony obiektu.

## Transformacja obrazu w przykładach

Aby „poczuc”, jak działa transformacja obrazu, dokonajmy transformacji prostych figur.

a) Płaszczyzna  $x' = a$

$$x = \gamma(a - \beta\sqrt{a^2 + y'^2 + z'^2}), \quad y = y', \quad z = z'.$$



## Twierdzenie Brianchona

Przekątne sześciokąta opisanego na okręgu przecinają się w jednym punkcie. W istocie jest tak również dla elips, ale my poprzestaniemy na okręgach.

Najpierw spostrzeżenie: Jeśli na dwóch stycznych do okręgu odłożymy (od punktów styczności i po tej samej stronie łączącej je cięciwy) taki sam odcinek, to będzie istniał okrąg styczny do tych stycznych w otrzymanych punktach. Istotnie — narysowana figura ma oś symetrii — prowadząc z końca odłożonego odcinka prostopadłą do stycznej otrzymujemy w jej przecięciu z osią symetrii środek poszukiwanego okręgu (dlaczego?).

A teraz dowód twierdzenia Brianchona. Niech sześciokąt  $ABCDEF$  będzie opisany na okręgu i styczny do niego w punktach  $P, Q, R, S, T, U$ . Odłożymy (jak na rysunku) jednakowe odcinki  $PP', QQ', RR', SS', TT', UU'$ . Narysujmy teraz okręgi  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  takie, o jakich była mowa w podanym wyżej spostrzeżeniu. Prosta  $BE$  jest prostą potęgową okręgów  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , gdyż wobec

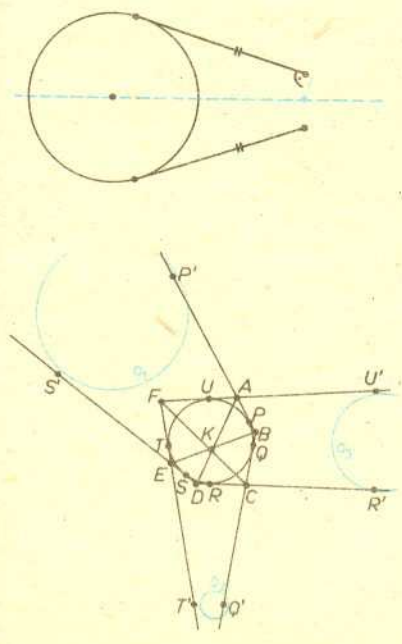
$$BP = BQ \quad \text{i} \quad ES = ET$$

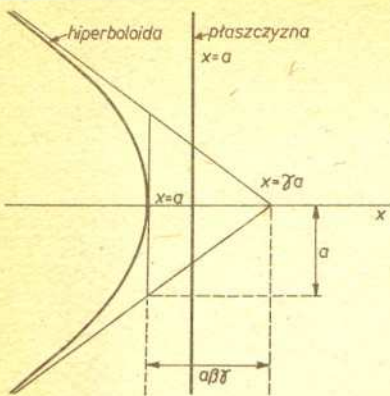
mamy

$$BP' = BQ' \quad \text{i} \quad ES' = ET',$$

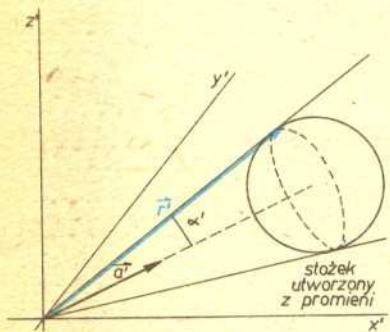
a więc  $B$  ma tę samą potęgę względem  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , tak samo  $E$ .

Analogicznie stwierdzamy, że  $CF$  jest prostą potęgową okręgów  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , oraz że  $AD$  jest prostą potęgową okręgów  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ . Punkt  $K$  przecięcia  $BE$  i  $CF$  ma taką samą potęgę względem  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oraz względem  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , a więc taką samą względem  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ . Musi więc leżeć na  $AD$ .

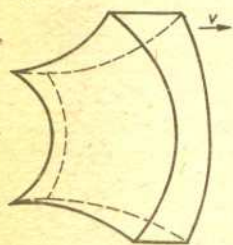




Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Otrzymujemy więc równanie

$$\left(\frac{x}{\gamma} - a\right)^2 = \beta^2(a^2 + y^2 + z^2)$$

opisujące hiperboloidę dwupowłokową (tylko jedna powłoka ma znaczenie fizyczne) lub stożek, gdy  $a = 0$ . Wynik transformacji przedstawia rysunek 5.

b) Półprosta  $x' = ay' \quad z = z' = 0$

$$x = \gamma(ay' - \beta \sqrt{a^2 y'^2 + y'^2}), \quad y = y',$$

stąd  $x = \gamma(a - \beta \sqrt{a^2 + 1})y'$  i obrazem jest półprosta.

Analizując zmianę współczynnika kierunkowego zauważmy, że

$$a = \text{ctg } \Theta', \quad (a - \beta \sqrt{a^2 + 1}) = \text{ctg } \Theta,$$

możemy więc wyznaczyć  $\text{tg } \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(\cos \Theta' - \beta)}$ .

Jest to wzór opisujący aberrację promieni świetlnych — już przez nas rozważany.

## Poruszająca się sfera

Wpływ „efektu optycznego” na wygląd szybko poruszających się ciał zauważył R. Penrose. Udowodnił on w 1959 r., że szybko poruszająca się sfera zachowuje kształt sfery. Wprawdzie transformacja obrazu nie przekształca sfery w sferę, ale po uwzględnieniu rzutowania na kliszę otrzymujemy przekształcenie przeprowadzające koła na kliszy  $K'$  w koła na kliszy  $K$ . Oto chyba najprostszy dowód (podany przez M. L. Boes w American Journal of Physics, 29 (1961), str. 283). Sfera spoczywa w układzie  $K$ . Promienie padające na kliszę tworzą stożek (rysunek 6), którego wierzchołkiem jest klisza — początek układu. Stosując bezpośrednio transformację Lorentza do równania stożka

$$r'a' = r' \cos \alpha', \quad r' = ct' \quad t' < 0 \quad (a' = 1)$$

otrzymamy

$$(a'_x \gamma - \beta \gamma \cos \alpha')x + a'_y y + a'_z z = -ct(\gamma \cos \alpha' - a'_x \beta \gamma),$$

a więc również stożek w układzie  $K$ . Stożek ten ma nieco inne parametry. Tak więc na kliszy obserwatora  $K$  ujrzymy też koło, ale na ogół o innej średnicy.

Rysunek 7 przedstawia, jak wygląda nasz sześcian, jeśli uwzględnimy jego rozmiary kątowe.



## Rozwiązanie zadania ze strony 1

Jak wiemy, wystarczy udowodnić twierdzenie ze strony 3. Załóżmy więc, że do czworokąta  $ABCD$  można wewnątrz kąta  $BAD$  dopisać okrąg. Oznaczmy punkty styczności przez  $P, Q, R$  i  $S$ .

Mamy

$$AP = AS, \quad BP = BR, \quad CQ = CR, \quad DQ = DS,$$

skąd

$$AB + BC = AP - BP + BR - CR = AP - CR = AS - CQ = AS - DS + DQ - CQ = AD + DC$$

lub

$$AB + BC = AP - BP + BR + CR = AP + CR = AS + CQ = AS - DS + DQ + CQ = AD + DC.$$

Założmy z kolei, że jest  $AB + BC = AD + DC$  i dla ustalenia uwagi  $AB > BC$ . Poprowadzimy przez  $B$  równoległą do  $CD$  i przez  $D$  równoległą do  $BC$ . Oznaczmy ich punkt przecięcia przez  $C_1$ . Z założenia mamy więc  $AB + C_1D = AD + C_1B$ , a więc w czworokąt  $ABC_1D$  można wpisać okrąg.

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki. Prostszy z nich to ten, gdy czworokąt  $ABCD$  ma kąt  $BCD$  wklęsły. Wówczas czworokąt  $ABC_1D$  jest wypukły. Poprowadzmy do wpisanego w ten czworokąt okręgu jeszcze dwie styczne równoległe odpowiednio do  $BC$  i  $CD$ . Oznaczmy ich przecięcia odpowiednio z  $AB$  przez  $D'$  i z  $AD$  przez  $B'$  oraz punkt ich przecięcia przez  $C'$ . Przekątne sześciokąta  $B'C'D'BC_1D$  na mocy twierdzenia Brianchona przecinają się w jednym punkcie  $K$ . Z podobieństwa trójkątów  $B'C'K$  i  $BC_1K$  oraz  $C'D'K$  i  $C_1DK$  mamy

$$\frac{B'C'}{BC_1} = \frac{C'K}{C_1K} = \frac{C'D'}{C_1D}, \quad \text{skąd} \quad \frac{B'C'}{C'D'} = \frac{BC_1}{C_1D} = \frac{CD}{BC}.$$