Rzuć monetę raz jeszcze, czyli prawo arcusa sinusa

Dr Jerzy RYLL

Pewnego deszczowego wieczoru Paweł postanowił sprawdzić, czy ten cały rachunek prawdopodobieństwa to aby nie lipa. Zaczął rzucać monetę i zapisywać kolejne wyniki. Zapis wyglądał tak: Paweł traktował orła jako $+1$, reszkę jako -1; dodawał liczby otrzymane w pierwszych k rzutach, otrzymaną sumę s_k zaznaczał jako punkt (k,s_k) w układzie współrzędnych i łączył odcinkami kolejne punkty. Rozumował tak: orzeł i reszka są tak samo prawdopodobne, a więc mniej więcej połowa otrzymanej łamanej powinna leżeć w górnej półpłaszczyźnie.

Po stu rzutach stwierdził ze zdumieniem, że 70 odcinków leży w górnej półpłaszczyźnie. Powtórzył to doświadczenie jeszcze cztery razy zapisując liczbę odcinków, których było więcej (leżących nad lub pod osią odciętych). Otrzymał kolejno 75, 73, 68, 74. „Albo ja mam pecha, albo ten cały rachunek prawdopodobieństwa do niczego się nie nadaje" — stwierdził i skończył zabawę z monetą.

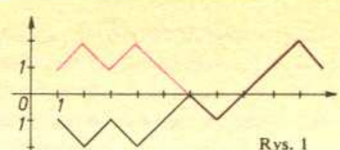
Paweł rzeczywiście miał pecha, ale „w drugą stronę". Jego wyniki były bardziej zbliżone do hipotetycznej pięćdziesiątki niż na to wskazuje rachunek prawdopodobieństwa. Dokładniej — prawdopodobieństwo uzyskania liczby między 50 a 75 jest równe około $\frac{1}{3}$ (mniej więcej takie samo jest prawdopodobieństwo uzyskania liczby większej od 93). Paweł powinien dokładniej zbadać całe doświadczenie i nie obrażać się na teorię. Właśnie za pomocą kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa obliczymy powyższe wyniki.

Oznaczmy liczbę łamanych, takich jakie rysował Paweł, łączących punkt $(0,0)$ z punktem (n, m) ($|m| \leqslant n$) przez $D_{n,m}$. Jeśli n i m są różnej parzystości, to oczywiście $D_{n,m} = 0$. W pozostałych przypadkach $D_{n,m} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}}$ (dowód w numerze).

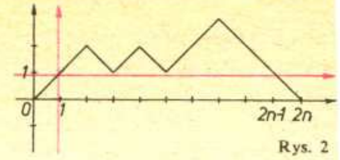
Obliczmy teraz, ile spośród łamanych łączących $(0,0)$ z $(2n,0)$ jest nieujemnych (tzn. leży w górnej półpłaszczyźnie) — oznaczmy ich liczbę przez p_n, a ile jest dodatnich (tzn. dodatkowo jedynymi ich punktami wspólnymi z osią odciętych jest ich początek $(0,0)$ i koniec $(2n,0)$) — tę liczbę oznaczmy q_n.

Zauważmy, że łamanych dodatnich od $(0,0)$ do $(2n,0)$ jest tyle, ile łamanych dodatnich od $(1,1)$ do $(2n-1,1)$. Wszystkich łamanych łączących te punkty jest $D_{2n-2,0}$ natomiast każdej takiej łamanej, która nie jest dodatnia, odpowiada dokładnie jedna łamana od $(1,-1)$ do $(2n-1,1)$ (odbijamy symetrycznie część łamanej od początku do pierwszego zetknięcia z osią odciętych — rys. 1). Takich łamanych jest $D_{2n-2,2}$. Tak więc

$$q_n = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Łatwo też zauważyć, że łamanych nieujemnych od $(0,0)$ do $(2n,0)$ jest tyle, ile dodatnich od $(0,0)$ do $(2n+2,0)$ (rys. 2). Tak więc

$$p_n = q_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Podzielmy zbiór łamanych nieujemnych od $(0,0)$ do $(2n,0)$ na n rozłącznych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$. Łamana należy do zbioru B_k, jeśli przechodzi przez punkt $(2k,0)$ i jest dodatnia między $(0,0)$ i $(2k,0)$ (i oczywiście nieujemna między $(2k,0)$ i $(2n,0)$). Łamanych w zbiorze B_k jest więc $p_{k-1} \cdot p_{n-k}$. Sumując zbiory B_k otrzymujemy, iż ciąg p_n spełnia zależność rekurencyjną

$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{k-1} \cdot p_{n-k}$ $(p_0 = 1)$. Bezpośredni analityczny dowód tego faktu jest skomplikowany. Napiszemy o tym w jednym z następnych numerów *Delty*.

Rozpatrzmy następujące zdarzenia:

1° Łamana przechodzi przez punkt $(2n,0)$.
2° Łamana nie przechodzi przez punkty $(2k,0)$ dla $k = 1, \ldots, n$.
3° Łamana jest nieujemna między 0 a $2n$.
4° Łamana przechodzi przez punkt $(2n,0)$ i jest dodatnia lub ujemna.
5° Łamana przechodzi przez punkty $(2n-2,0)$ i $(2n-1,-1)$ i jest nieujemna między 0 a $2n-2$.

Okazuje się, że prawdopodobieństwo zdarzeń 1° — 3° jest równe $a_n = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ $(a_0 = 1)$, a zdarzeń 4° i 5° jest równe

$$b_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n+1} = \frac{1}{2n} a_{n-1} = a_{n-1} - a_n \quad (b_0 = 0).$$

Oczywiście przy obliczaniu tych prawdopodobieństw wystarczy się ograniczyć do łamanych o $2n$ odcinkach — tych łamanych jest 2^{2n}.

Prawdopodobieństwa zdarzeń 4° i 5° otrzymujemy natychmiast z obliczonych wartości q_n i p_{n-1}. Prawdopodobieństwo 2° jest równe $1-b_1-b_2- \ldots -b_n$ (od wszystkich łamanych odejmujemy te, które przechodzą przez $(2,0)$ — jest ich $b_1 \cdot 2^{2n}$; te, które nie przechodzą przez $(2,0)$, ale przechodzą przez $(4,0)$ — jest ich $b_2 \cdot 2^{2n}$ i tak dalej). Ale

$$1-b_1-b_2- \ldots -b_n = 1-(a_0-a_1)- \ldots -(a_{n-1}-a_n) = a_n.$$

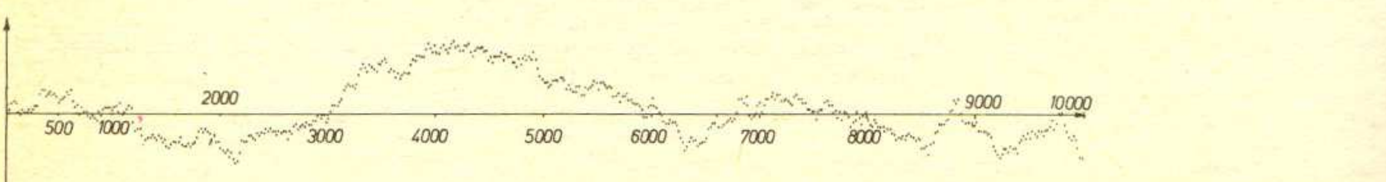
Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo 3° korzystając z prawdopodobieństwa 5°. 1° wynika bezpośrednio ze wzoru na $D_{2n,0}$.

Jako wniosek otrzymujemy równość

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}$$

trudną do analitycznego udowodnienia.

Podzielmy zbiór łamanych o $2n$ odcinkach przechodzących przez $(2n,0)$ na rozłączne zbiory $A_1, \ldots, A_n$. Do zbioru A_k należą łamane przechodzące przez $(2k,0)$, ale nie przechodzące przez $(2i,0)$ dla $i = 1, \ldots, k-1$. Każda taka łamana jest wyznaczona



Rys. 4. Zapis wyników 10000 rzutów idealną monetą...

przez łamaną od (0,0) do $(2k,0)$, która jest albo dodatnia, albo ujemna, oraz przez dowolną łamaną od $(2k,0)$ do $(2n,0)$. Tak więc do zbioru A_k należy $2^{2k}b_k 2^{n-k}a_{n-k}$ łamanych (korzystamy z 4° i 1°). Sumą zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ jest zdarzenie 1° i otrzymujemy żądaną równość.

A teraz główne twierdzenie

Prawdopodobieństwo tego, że łamana o $2n$ odcinkach ma $2k$ odcinków dodatnich i $2n-2k$ ujemnych (tzn. $2k$ odcinków leży w górnej półpłaszczyźnie, a $2n-2k$ w dolnej) jest równe

$$a_k \cdot a_{n-k} = \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot 2^{-2n}.$$

Dowód jest indukcyjny względem n. Dla wygody oznaczmy przez $P_{k,n}$ prawdopodobieństwo z twierdzenia. Dla $n = 0$ nie ma co sprawdzać. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczb mniejszych niż n. Mamy oczywiście $P_{n,n} = P_{0,n} = a_n a_0 = a_n$. Niech $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Wtedy łamana z interesującego nas zbioru musi przecinać oś odciętych — pierwszym punktem przecięcia niech będzie $(2r,0)$. Albo łamana była między (0,0) a $(2r,0)$ dodatnia (wtedy $r \leqslant k$), a dalej miała $2k-2r$ odcinków dodatnich i $2n-2k$ ujemnych, albo między (0,0) i $(2r,0)$ była ujemna, a dalej było $2k$ odcinków dodatnich i $2n-2k-2r$ ujemnych (wtedy $r \leqslant n-k$).
Łamanych pierwszego rodzaju jest

$$\left(\frac{1}{2} b_r \cdot 2^{2r}\right) \cdot (P_{k-r,n-r} 2^{2n-2r}) = 2^{2n-1} \cdot b_r \cdot P_{k-r,n-r}$$

(pierwszy czynnik to liczba łamanych dodatnich, a drugi to po prostu oznaczenie). Łamanych drugiego rodzaju jest

$$\left(\frac{1}{2} b_r \cdot 2^{2r}\right) \cdot (P_{k,n-r} 2^{2n-2r}) = 2^{2n-1} \cdot b_r \cdot P_{k,n-r}.$$

Sumując te iloczyny i dzieląc przez 2^{2n} otrzymujemy

$$P_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} b_r \cdot P_{k-r,n-r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot P_{k,n-r}.$$

Skorzystajmy teraz z założenia indukcyjnego

$$P_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} b_r \cdot a_{k-r} \cdot a_{n-k} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot a_k \cdot a_{n-k-r} =$$

$$= \frac{1}{2} a_{n-k} \cdot \sum_{r=1}^{k} b_r \cdot a_{k-r} + \frac{1}{2} a_k \cdot \sum_{r=1}^{n-k} b_r \cdot a_{n-k-r} =$$

$$= \frac{1}{2} a_{n-k} \cdot a_k + \frac{1}{2} a_k \cdot a_{n-k} = a_k \cdot a_{n-k}.$$

Przedostatnia równość wynika z wniosku poprzedzającego twierdzenie.

Już z powyższego twierdzenia można obliczyć podane na początku prawdopodobieństwa, ale byłoby to dosyć pracochłonne. Okazuje się, że można podać bardzo wygodny wzór przybliżony zwany pierwszym prawem arcusa sinusa.

Niech $0 < t < 1$. Prawdopodobieństwo tego, iż stosunek $\frac{k}{n}$ odcinków dodatnich do wszystkich odcinków jest mniejszy niż t, jest zbieżne (przy $n \to \infty$) do

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}.$$

Ze wzoru Stirlinga $\left(n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ mamy

$$P_{k,n} = \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot 2^{-2n} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}.$$

Jeśli $\frac{1}{2} < t < 1$, to prawdopodobieństwo tego, że $\frac{k}{n}$ leży między $\frac{1}{2}$ a t, jest równe

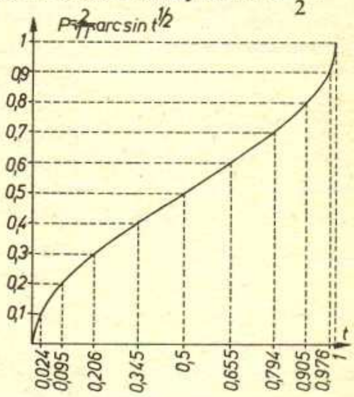
$$\sum_{\frac{n}{2} < k < tn} P_{k,n} = \frac{1}{\pi n} \sum_{\frac{n}{2} < k < tn} \left(\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Przy $n \to \infty$ prawa strona dąży (jako ciąg sum Riemanna) do

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} - \frac{1}{2}.$$

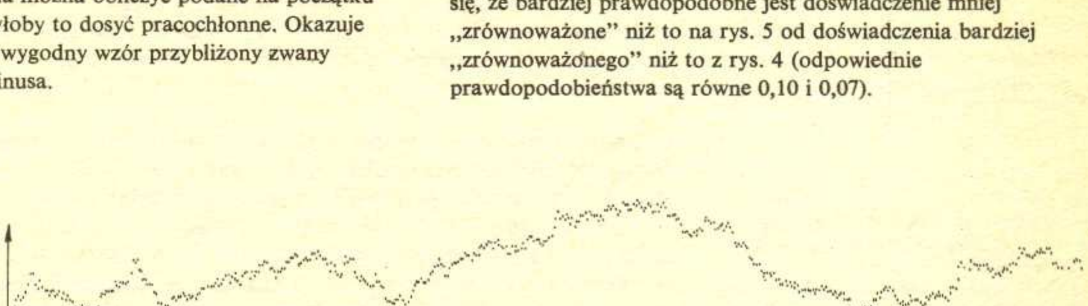
Ale prawdopodobieństwo, iż $\frac{k}{n}$ nie jest większe od $\frac{1}{2}$, jest oczywiście równe $\frac{1}{2}$, stąd nasz wzór przybliżony.

Wzór powyższy dobrze przybliża wartości nawet dla małych n (np. $n = 20$). Z wykresu funkcji występującej po prawej stronie (rys. 3) widać, że stosunek $\frac{k}{n}$ ma dużo większą szansę być bliski zeru lub jedności niż bliski średniej wartości $\frac{1}{2}$.



Rys. 3

W książce W. Fellera „Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa" podany jest przykład przebiegu doświadczenia imitującego 10 000 rzutów monetą (rys. 4). Rozpatrzmy też doświadczenie odwrotne (rys. 5) — punkt końcowy traktujemy jako początek układu współrzędnych i zmieniamy zwrot osi odciętych. Okazuje się, że bardziej prawdopodobne jest doświadczenie mniej „zrównoważone" niż to na rys. 5 od doświadczenia bardziej „zrównoważonego" niż to z rys. 4 (odpowiednie prawdopodobieństwa są równe 0,10 i 0,07).



Rys. 5. ... i to samo „od tyłu".