Dowód twierdzenia mocniejszego może być łatwiejszy

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

„Nie mogę wnieść tej walizki na III piętro, jest ona za ciężka; wobec tego wezmę pod drugą pachę ten oto kufer" — w taki to ironiczny sposób przedstawia Cat-Mackiewicz monolog wewnętrzny pewnej postaci z niedawnej przeszłości (*Zielone oczy*, str. 177, wyd. 1959).

Od tego rodzaju desperackich decyzji nie są wolni i matematycy; co więcej, są nieraz do tego przez matematykę zachęcani. Liczby Fibonacciego, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., tworzy się tak, że każda począwszy od trzeciej jest sumą dwu poprzednich, $u_{n+1} = u_{n-1}+u_n$. Jeśli ktoś chce zadać torturę mniej doświadczonemu koledze, może mu dać do udowodnienia, że

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$

a potem, już zmęczonemu, dać pod drugą pachę kufer:

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2,$$

i przyglądać się, jak świetnie sobie radzi.

Zjawisko prosto się tłumaczy: w dowodzie indukcyjnym (bo taki przyjdzie tu prowadzić) sprawdzenie prawdziwości tezy na pierwszych krokach bywa przeważnie łatwe, więc dodanie nowej tezy na ogół nie zwiększa trudności; przejście z n na $n+1$ może jednak okazać się łatwiejsze, bo mamy teraz dodatkowe założenie umożliwiające ruszenie z martwego punktu.

Dr A. K., po przeczytaniu rękopisu tego artykułu, zwrócił autorowi uwagę, że inny dobrze znany sposób to wsadzić walizkę i kufer do znacznie większej od nich paki (ogólniejszej równości):

$$u_{n+m} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1}$$

(przy $m = n$ dostajemy łatwo pierwszą z poprzednich równości, a przy $m = n+1$ drugą); tę już bez najmniejszego wysiłku przemieszcza nam zwykła indukcja względem m. Jest to sposób łatwiejszy niż dźwiganie walizki i kufra razem bądź oddzielnie.

L. Cinman w *Kwancie* 11 (1976), str. 9—12, pisze o nieuważnym Jasiu, który źle przepisał treść zadania i przez to zamiast nierówności $\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} < 1/\sqrt{n}$ musiał dowieść (przez indukcję) mocniejszej nierówności, w której zamiast $\sqrt{n}$ miał $\sqrt{n+1}$. Autor cytowanego artykułu analizuje te paradoksalne sytuacje z punktu widzenia teorii dowodu.

Ale i poza zakresem dowodów indukcyjnych zdarza się, że dowód twierdzenia mocniejszego bywa łatwiejszy. Rzecz jest ciekawa z punktu widzenia psychologii myślenia matematycznego. George Polya w swojej książce *Jak to rozwiązać* (tłumaczenie polskie, Warszawa 1964, Biblioteka Problemów 71) nazywa to zjawisko paradoksem odkrywcy komentując je wieloma przykładami.

Stwierdzenie

(A) istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $5x^4-x^3-72 = 0$
jest słabsze niż stwierdzenie
(B) liczba 2 spełnia równanie $5x^4-x^3-72 = 0$;

ale dowód tego słabszego stwierdzenia wymaga pewnej wiedzy, a dowód twierdzenia (B) (mocniejszego) nie sprawi kłopotu nawet dziecku, jeśli wie ono, co to jest potęga liczby.

Jeśli A wynika z B, ale B nie wynika z A, to zwykło się mówić, że stwierdzenie A jest słabsze niż B.

Ta rzecz też się prosto tłumaczy. Wyobraźmy sobie stos kluczy i zamek.

Stwierdzenie

(A) któryś z tych kluczy otwiera zamek,
jest słabsze niż stwierdzenie
(B) ten klucz otwiera zamek;

ale jeśli stos kluczy jest dość pokaźny, to dowód stwierdzenia A będzie odpowiednio trudny; dowód stwierdzenia B sprowadza się do otwarcia zamka wskazanym kluczem, co polega na wykonaniu pewnej czynności; w matematyce odpowiada to wykonaniu dowodu.

Podobnie jest z uogólnieniami. Bardzo intrygujące jest pytanie: co jest większe, π^e czy e^π? Student I roku bez trudu wszakże wstawi właściwy znak nierówności między funkcje x^e i e^x dla $x \geqslant e$.

Oto przykład z matematyki bardziej zaawansowanej. Następujące twierdzenie, dowodzone przez Aleksandrowa (1924) i Sierpińskiego (1933), było uważane za trudne:

(A) jeśli przestrzeń metryczna jest spójna i lokalnie ośrodkowa, to jest ośrodkowa.

Z czasem uległo ono wzmocnieniu do twierdzenia

(B) jeśli przestrzeń parazwarta jest spójna i lokalnie ośrodkowa, to jest ośrodkowa,

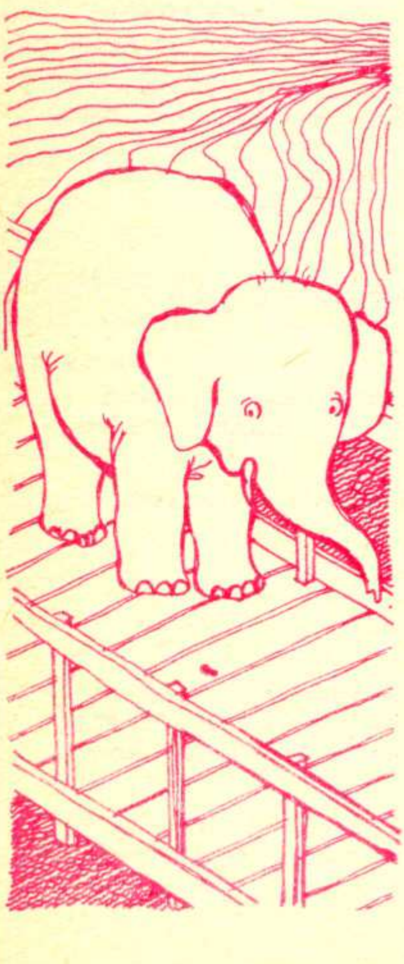
które nie jest uważane za szczególnie trudne i którego dowodu można wymagać od studenta na egzaminie; dla wyjaśnienia dodajmy (nie objaśniając reszty pojęć), że przestrzenie metryczne są zawsze parazwarte (twierdzenie Stone'a, 1948); stąd właśnie (B) $\Rightarrow$ (A).

Trudność dowodu twierdzenia (A) polega na tym, że jest wiele kluczy w postaci własności przestrzeni metrycznych, które można by w dowodzie wykorzystać; który więc wybrać? Próbując dowieść (B) nic takiego nas nie dręczy; parazwartość to określona własność — klucz, która stanowi doskonałą podpowiedź.

Wiele słynnych dowodów to dowody twierdzeń od razu trudniejszych. Chcąc dowieść, że π jest niewymierne, Lambert (1767) dowiódł, że jeśli tg$x$ jest liczbą wymierną, to x jest liczbą niewymierną; stąd niewymierność π, bo $\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$.

Liczbę a (rzeczywistą lub zespoloną) nazywamy algebraiczną, gdy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego a jest pierwiastkiem.

Lindemann (1882) dowodząc niealgebraiczności liczby π dowodził od razu, że jeśli liczba e^z jest wymierna, to liczba (zespolona) z nie jest algebraiczna; stąd niealgebraiczność liczby π, bo $e^{2\pi i} = 1$. Lindemann dowodził wszakże twierdzenia jeszcze dalej idącego: nie istnieją różne od zera liczby algebraiczne $a_1, \ldots, a_n$ i różne liczby algebraiczne $x_1, \ldots, x_n$ takie, że $a_1e^{x_1} + \ldots + a_ne^{x_n} = 0$. Było to ułatwienie (!), bo umożliwiało wejście na drogę przetartą wcześniej przez Hermite'a, który dowiódł (1873), że nie istnieją różne od zera liczby całkowite $a_1, \ldots, a_n$ i różne liczby całkowite $m_1, \ldots, m_n$ takie, że $a_1e^{m_1} + \ldots + a_ne^{m_n} = 0$, co oznaczało (*ex definitione*) niealgebraiczność liczby e.



Paradoksalność opisanych sytuacji bierze się głównie z uproszczonego patrzenia na twórczość matematyczną, w której zauważa się przede wszystkim dowody twierdzeń, bo tylko one są utrwalane na piśmie i podlegają obiektywnym ocenom. Praca myśli polegająca na odrzucaniu fałszywych tropów, poszukiwaniu prawdopodobnych rozwiązań, a w końcu formułowaniu sprawdzalnych hipotez, bywa w rezultacie ignorowana. Zygzaki myśli prowadzące do odkrycia pozostają przeważnie nieznane.

Uwidocznia je historia, jeśli droga do odkrycia rozkłada się na lata i na wielu ludzi.

W poszukiwaniach matematycznych (jak we wszystkich innych) trudności bywają najczęściej związane z wyborem spośród napotykanych możliwości. Na danym kroku nie musi być ich wiele, ale każdy niewłaściwy wybór to nieraz przekreślenie szans.

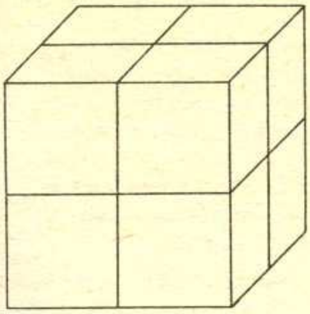
Już wybór z dwu możliwości może być dużym utrudnieniem. Próbując rozstrzygnąć zagadnienie nie wiemy z góry o wyniku. Natrafiając na trudności oscylujemy między poszukiwaniami dowodu i kontrprzykładu. O ileż łatwiej szuka się dowodu, jeśli się wie, że twierdzenie jest prawdziwe.

Kiedy Lindemann dowiódł niealgebraiczności liczby π (dodajmy, że zagadnienie było w sposób wyraźny postawione przeszło sto lat przedtem przez Lamberta), posypały się inne dowody: J. F. Koksma w *Diophantische Approximationen* (Springer 1936) wspomina (na str. 60) o co najmniej dwudziestu; tzw. drugie dowody są zwykle prostsze, a ich głębszy sens polega często na tym, że ukazują nowe powiązania danego twierdzenia z innymi i jego dodatkowe znaczenia.

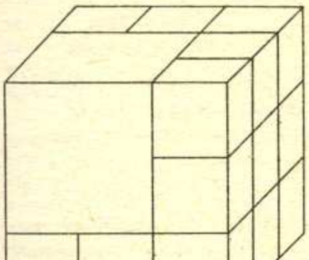
A oto przykład lżejszego kalibru i prościej się tłumaczący. Martin Gardner w książce *Aha! Insight* (1978) opisuje (na str. 54) jak to Mr. Tack bezskutecznie łamał głowę nad obliczeniem pola między dwoma koncentrycznymi okręgami (takiego kształtu był hall, w którym miał położyć dywan) mając podany jeden tylko wymiar: długość cięciwy większego okręgu będącej jednocześnie styczną do mniejszego. Kiedy jednak dowiedział się, że Mr. Sharp, którego uważał za dobrego matematyka, wie jak to zrobić, przestał mieć jakiekolwiek trudności.

Rozwiązanie zadania M 378. Sześcian o krawędzi a można rozciąć:

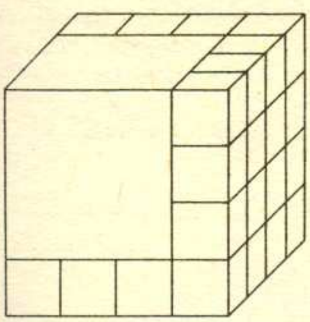
1) na 8 sześcianów o krawędzi $\frac{1}{2}a$,



2) na 1 sześcian o krawędzi $\frac{2}{3}a$ i 19 sześcianów o krawędzi $\frac{1}{3}a$ — razem 20 sześcianów,



3) na 1 sześcian o krawędzi $\frac{3}{4}a$ i 37 sześcianów o krawędzi $\frac{a}{4}$ — razem 38 sześcianów.



Wynika stąd, że z rozcięcia na n sześcianów można otrzymać rozcięcie na $n+7$, $n+19$ i $n+37$ sześcianów — dzieląc jeden z sześcianów rozbicia odpowiednio według metody 1), 2) lub 3).

Wśród możliwych podziałów będą między innymi takie, w których liczba części wyniesie $k_1 = 1+7 = 8$, $k_2 = 1+19 = 20$, $k_3 = k_2+19 = 39$, $k_4 = k_3+19 = 58$, $k_5 = k_4+19 = 77$, $k_6 = 1+37 = 38$, $k_7 = k_6+37 = 75$,
oraz (dla $l = 1, 2, \ldots, 7$ oraz $m = 0, 1, \ldots$)

$$k = k_l + 7m.$$

Ponieważ jednak reszty z dzielenia k_l przez 7 wynoszą odpowiednio 1, 6, 4, 2, 0, 3 i 5, więc k przyjmuje wszystkie wartości naturalne poczynając od $max(k_l)$, czyli od 77

Twórcy matematyki nigdy nie mieli wątpliwości, gdzie leży punkt ciężkości w rozwiązywaniu zagadnień. Imre Lakatos, który całą swoją książkę *Proofs and refutations* (1976) poświęca roli hipotez w matematyce, pisze w niej (w odnośniku na str. 9):

To, że hipotezy (twierdzenia) wyprzedzają dowody, było dla matematyków starożytności rzeczą naturalną. Według Proklosa „... trzeba wiedzieć wcześniej, czego się szuka". Grecy nie przywiązywali wagi do stwierdzeń, które udawało się im uzyskiwać po drodze, jeśli przedtem nie były przewidziane. Nazywali je poryzmatami (wnioskami, rezultatami ubocznymi pojawiającymi się przez przypadek i bez zasługi), stanowiącymi, jak pisał Proklos, rodzaj spadłego owocu lub daru losu. W nocie do jednej z prac Eulera można przeczytać, że twierdzenia arytmetyczne „są odkrywane na długo przedtem, nim ich prawda zostaje potwierdzona ścisłymi dowodami". Podobno Gauss skarżył się: „mam rezultaty już od dawna, nie wiem jednak dotąd, jak się do nich dobrać"; Riemann zaś mówił: „Gdybym miał tylko twierdzenia. Dowody znalazłbym z łatwością". Polya upominał: „Masz znać najpierw twierdzenia, zanim zabierzesz się do dowodzenia".

Wacław Sierpiński w liście do redakcji *Matematyki* (rocznik 11 (1958), zeszyt 4—6, str. 1) pisze: *Twierdzenia matematyczne noszą zwykle nazwisko tego, który je pierwszy sformułował, niezależnie od tego, czy je udowodnił.*
Twierdzenie Waringa zostało... udowodnione przez Hilberta, ale nie przestano je nazywać twierdzeniem Waringa. Na przykład tak zwane wielkie twierdzenie Fermata będzie nosiło nazwisko Fermata, a nie tego, który je może kiedyś udowodni.

Otrzymanie twierdzenia mocniejszego nie bywa więc łatwiejsze. Chociaż, może było tak dla nieuważnego Jasia, któremu traf podarował właściwą hipotezę. Nie było to jednak w sumie łatwiejsze w przypadku liczb Fibonacciego, jeśli się uwzględni podpowiedź koledze. Student, który dowodził twierdzenia o ośrodkowości od razu dla przestrzeni parazwartych, oprócz podpowiedzi dostał przedtem cały zapas wiadomości o wpisywaniu pokryć, a ten, który dowodził nierówności $\pi^e < e^\pi$, szedł (już po podpowiedzi) utartą od przeszło dwu stuleci drogą. Niech pozostanie (zgodnie z przeznaczeniem) zagadką i jednocześnie zadaniem z geometrii pytanie, dlaczego było tak ważne dla Mr. Tacka wiedzieć, że Mr. Sharp wie. Doliczmy do trudu Lindemanna trud Hermite'a. I jeśli udaje nam się czasem znaleźć elegancki dowód znanego twierdzenia, to wypada nam sobie wtedy przypomnieć, że nie jesteśmy przez to lepsi od znakomitych poprzedników.

Kącik Czytelniczy

Jak spędzały czas angielskie ladies w latach trzydziestych dziewiętnastego stulecia?

Z czasopisma *The Mathematician* (vol. III, London 1848) przepisujemy zadanie nr 187.

CLXXXVII (Dr. Rutherford) Znaleźć nierzeczywiste pierwiastki równania

$$x^5+3x^4+2x^3+3x^2-2x-2 = 0$$

Rozwiązanie (Dr. Rutherford, autor). Posługując się zwykłą metodą badania własności pierwiastków równań znajdujemy łatwo, że dane równanie ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, a wobec tego cztery pierwiastki nierzeczywiste czy „niemożliwe". Rzeczywistym pierwiastkiem tego równania jest 1,05910900346 (patrz *Lady's Diary* na rok 1839, str. 47), a aby znaleźć pierwiastki nierzeczywiste, musimy...

... tak więc czterema pozostałymi pierwiastkami są

$-0{,}247951472742 \pm i\sqrt{0{,}402475312370}$ oraz

$-1{,}781603028989 \pm i\sqrt{0{,}893699913966}.$

(Pominęliśmy oczywiste rachunki — *Red.*)