Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Zagadnienie poznania geometrii Wszechświata od dawna zaprzątało umysły. Przez wieki obowiązywała hipoteza, że we Wszechświecie obowiązuje geometria euklidesowa, taka jakiej uczyliśmy się w szkole. Obecnie kosmolodzy odrzucają tę hipotezę na rzecz bardziej skomplikowanych. Czy w ogóle możliwe jest badanie geometrii Wszechświata? Kluczem jest tu pomysł opisany w 1884 roku przez E. A. Abbota: Wyobraźmy sobie istoty dwuwymiarowe, Płaszczaków, żyjących na powierzchni kuli. Kula ma wymiary duże w porównaniu z Płaszczakami, tak, że Płaszczacy początkowo byli przekonani o tym, że w ich Wszechświecie obowiązuje dwuwymiarowa geometria euklidesowa. Państwo Płaszczaków miało kształt koła, w którego środku znajdowała się stolica. W miarę upływu czasu waleczni Płaszczacy powiększali swoje państwo, zachowując jednak jego kolisty kształt. Początkowo długość granic obliczona ze wzoru $2\pi r$, gdzie r było odległością granic od stolicy, wydawała się dokładna. Po pewnym czasie pojawiły się rozbieżności pomiędzy teorią a pomiarem, ale zwalono wszystko na niedokładność pomiarów. Gdy jednak długość granic zamiast rosnąć zaczęła maleć, trzeba było zrewidować teorię.

E. A. Abbot: „Flatland", London, 1884; mamy więc właśnie stulecie.

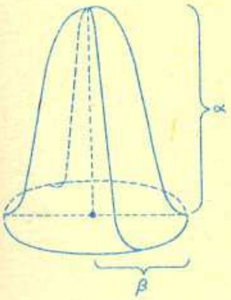
Czyż nie przypomina to problemu, czy Ziemia jest płaska?

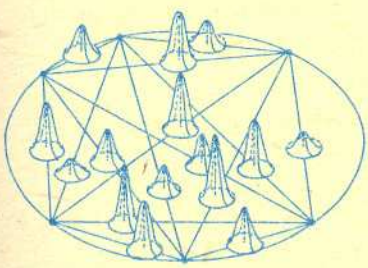
Aby móc zastanawiać się dalej nad geometrią Wszechświata, trzeba się umówić, czemu w rzeczywistości odpowiadają abstrakcyjne pojęcia geometryczne, takie jak na przykład „proste" lub „odległość".

Zazwyczaj odpowiada się na ten problem następująco: światło rozchodzi się po liniach prostych, a więc prostymi powinny być promienie światła, a ponieważ prędkość światła (w próżni) jest stała, więc odległość jest to czas potrzebny światłu na przebycie mierzonej drogi. Ściślej jest to jedna z odległości: światło może biec po kilku prostych. Wyobraźmy sobie cienką płytkę szklaną, gładką, to znaczy bez załamań, lecz powyginaną na różne sposoby, płytka ta została posrebrzona po obu stronach, tworząc podwójne lustro zwrócone odbijającymi stronami do środka. Światło wpuszczone do tej płytki nie może jej opuścić i rozchodzi się po pewnych krzywych, które zgodnie z naszą kosmologiczną definicją prostej będą prostymi w wewnętrznej geometrii naszej płytki. Te same proste otrzymamy usuwając płytkę i naciągając gumową nitkę pomiędzy pozostałymi srebrnymi okładzinami. Oczywiście zamiast o płytce, która jakkolwiek cienka, ma jednak pewną grubość, powinniśmy mówić o dwuwymiarowej powierzchni, zwanej dwuwymiarową przestrzenią Riemanna. Proste opisane przez doświadczenie ze światłem lub gumką noszą nazwę krzywych geodezyjnych. Jeśli w takich przestrzeniach umówimy się mierzyć odległość wzdłuż geodezyjnych, otrzymamy geometrie riemannowskie na ogół różne dla różnych powierzchni.

Płaszczaccy geometrzy odkryli po wielu wysiłkach, że świat ich ma kształt kuli. Gdybyśmy chcieli powtórzyć ich sukces, musielibyśmy uogólnić pojęcie przestrzeni Riemanna na więcej wymiarów. Nie stwarza to jednak trudności (poza rachunkowymi). Podobno Karol Fryderyk Gauss był pierwszym, który podjął próbę sprawdzenia, jaka geometria obowiązuje w naszym świecie. Wykorzystał w tym celu twierdzenie o sumie kątów w trójkącie. W geometrii euklidesowej suma ta wynosi 180°, natomiast w geometrii odkrytej przez Gaussa, a zwanej dziś geometrią Bolyai-Łobaczewskiego, jest mniejsza; różnica nosi nazwę defektu trójkąta i jest proporcjonalna do jego powierzchni. Gauss korzystając z tego, że właśnie prowadził pomiary Królestwa Hanoweru, wybrał trzy góry: Hohenhagen, Inselberg i Brocken jako wierzchołki trójkąta, pomierzył kąty, dodał i ... za pomocą wymyślonego przez siebie rachunku błędów wykazał, że różnica jest zbyt mała, by świadczyć o czymkolwiek: można ją wyjaśnić błędami pomiaru.

Doświadczenie Gaussa wskazuje, jaką drogą należy postępować: należy wybrać pewną liczbę punktów i pomierzyć, powiedzmy, odległości pomiędzy tymi punktami, a następnie spróbować odwzorować te punkty w jakąś przestrzeń Riemanna tak, by pomierzone odległości zgodziły się z teoretycznymi. Ze względów praktycznych trudno się spodziewać, by wybranych punktów było nieskończenie wiele. Niech zatem będą to punkty $a_1, \ldots, a_n$. Możemy przypuścić,





że dla dowolnych punktów odległość będzie liczbą nieujemną, że będzie zerem wtedy i tylko wtedy, gdy punkty się pokrywają, że odległość od a_i do a_j jest taka sama jak odległość od a_j do a_i. Ponieważ punktów jest skończenie wiele, więc i odległości między nimi jest skończenie wiele, musi zatem istnieć najmniejsza odległość między różnymi punktami. Weźmy teraz okrąg o średnicy jeszcze mniejszej i rozmieśćmy na nim punkty $b_1, \ldots, b_n$. Odległość b_i od b_j jest zatem mniejsza od odległości a_i od a_j. Przygotujmy teraz kołpaczki wycięte z wykresu funkcji $f(x, y) = \alpha(x^2+y^2-\beta^2)^2/\beta^4$ i poprzyklejajmy je na odcinkach łączących wybrane punkty na okręgu zręcznie dobierając parametry α i β tak, by nie właziły na odcinki łączące inne punkty i aby w tak otrzymanej przestrzeni Riemanna odległości między b_i i b_j były równe odległościom między a_i i a_j. Zinterpretowaliśmy zatem nasze doświadczenie w pewnej dwuwymiarowej geometrii Riemanna.

Wynik jest dość zaskakujący: bez względu na to, jaki jest wynik doświadczenia, można go zinterpretować w geometrii płaskiej. Oznacza to, że nie można wykluczyć, że w naszym Wszechświecie obowiązuje geometria płaska! Co więcej, jeśli zasadę brzytwy Ockhama rozumieć jako postulat przyjmowania najprostszych rozwiązań, to musimy przyjąć, że Wszechświat (a my z nim) jest płaski. Przyzwyczajono nas już przecież do niewierzenia naszym oczom: Ziemia (podobno) nie jest płaska, za to krąży dokoła Słońca; w kryształowo czystej wodzie znajdują się tysiące żyjątek...

Może jednak mój wniosek jest zbyt pochopny. Ostatecznie pokazałem tylko, jak konstruować odpowiednią przestrzeń Riemanna w przypadku doświadczenia polegającego tylko na mierzeniu odległości. Konstrukcja ta nie daje się zastosować już w przypadku doświadczenia Gaussa polegającego na mierzeniu kątów. Dla takich doświadczeń również potrafię skonstruować odpowiednią powierzchnię Riemanna. Nie umiem jednak udowodnić, że można to zrobić dla dowolnego doświadczenia. Nie pozostaje mi zatem nic innego, jak tylko ogłosić konkurs na zaprojektowanie takiego doświadczenia, które ostatecznie obaliłoby zakorzeniony przesąd, że żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni.

Rozwiązanie zadania F 159. Całkowite wygaszenie odbicia nastąpi wtedy, gdy amplitudy obu fal odbitych będą takie same, a różnica dróg optycznych równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali. Drugi z tych warunków spełniony jest, gdy

$$d = \frac{\lambda}{4n'},$$

gdzie n' jest współczynnikiem załamania napylonej warstwy.
Dla płaskiej fali elektromagnetycznej padającej prostopadle na granicę dielektryków (o współczynnikach załamania n' i n) stosunek amplitud pola elektrycznego fali padającej E_0 i odbitej E jest równy

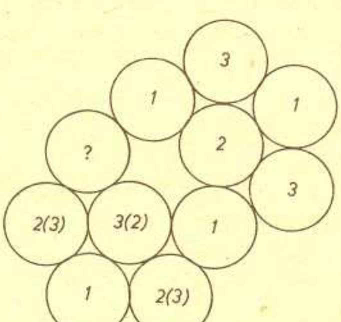
$$\frac{E}{E_0} = \frac{n-n'}{n+n'}.$$

Jeśli zaniedbamy wielokrotne odbicia, to otrzymamy stąd warunek równości amplitud

$$\frac{n'-1}{n'+1} = \frac{n-n'}{n+n'},$$

a stąd $n' = \sqrt{n}$.
Dla światła o długości fali $\lambda = 550$ nm (największa czułość oka) oraz $n = 1{,}516$ (szkło typu crown) grubość warstwy wynosi $d \simeq 110$ nm, a $n' = 1{,}231$. Często dla wygaszenia fal odbitych o różnych barwach pokrywa się szkło kilkoma warstwami substancji przeciwodblaskowej.

Rozwiązanie zadania M 374. Gdy $n \leqslant 4$, teza naszego zadania jest w oczywisty sposób prawdziwa. Przypuśćmy teraz, że żądane pokolorowanie istnieje dla wszystkich układów m kół i rozpatrzmy pewien układ $m+1$ kół. Ustalmy pewien punkt O i wybierzmy koło K, którego środek leży najdalej od O. Środki wszystkich kół naszej konfiguracji leżą w kole domkniętym, na którego obwodzie leży środek K. Wynika stąd, że K może być styczne najwyżej do trzech innych kół. Usuwając K otrzymamy układ m kół, dla którego żądane pokolorowanie istnieje na mocy założenia indukcyjnego. Wystarczy teraz pomalować K na kolor różny od barw kół stycznych do K, aby zakończyć krok indukcyjny.
Przykład konfiguracji, której nie można pokolorować trzema barwami, pokazuje rysunek.



Rozwiązanie zadania M 376. Mnożąc obie strony równania przez $\sin\frac{x}{7}$ mamy

$$16\sin\frac{x}{7}\cos\frac{x}{7}\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{4x}{7}\cos\frac{8x}{7} =$$
$$= \sin\frac{x}{7}, \text{ skąd } 8\sin\frac{2x}{7}\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{4x}{7}\times$$
$$\times\cos\frac{8x}{7} = 4\sin\frac{4x}{7}\cos\frac{4x}{7}\cos\frac{8x}{7} =$$
$$= 2\sin\frac{8x}{7}\cos\frac{8x}{7} = \sin\frac{16x}{7} = \sin\frac{x}{7},$$

czyli $0 = \sin\frac{16x}{7} - \sin\frac{x}{7}$, skąd otrzymujemy dwie serie:

$$x = \frac{14}{15}k\pi, \quad x = (2k+1)\cdot\frac{7\pi}{17}.$$

Jeżeli jednak $\frac{14}{15}k\pi = 7n\pi$ (czyli $k = 15m$, $n = 2m$), lub $(2k+1)\frac{7\pi}{17} = 7n\pi$, (czyli $k = 17m+8$, $n = 2m+1$), to otrzymane pierwiastki nie spełniają równania wyjściowego (wprowadziliśmy je mnożąc nasze równanie przez $\sin\frac{x}{7}$). Ostatecznie więc rozwiązaniami naszego równania są:

$$x = \frac{14}{15}k\pi \qquad 15 \nmid k \text{ i}$$
$$x = (2k+1)\cdot\frac{7\pi}{17} \qquad 17 \nmid k-8.$$