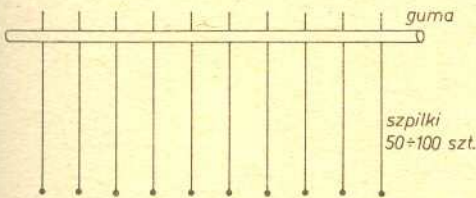


Dr Jerzy ZAGRODZIŃSKI

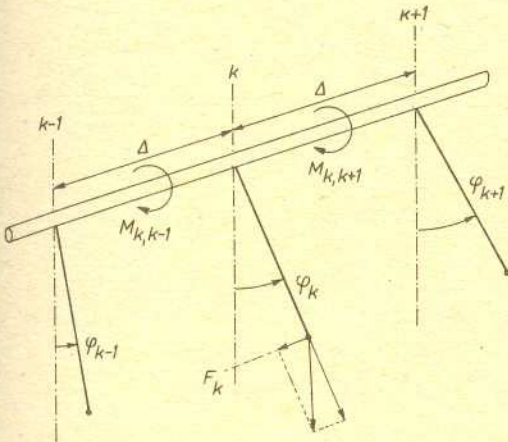
Własności wahadła matematycznego zna każdy Czytelnik *Delty*, a niektórzy potrafią z pewnością opisać zjawiska zachodzące w układzie dwóch wahadeł sprzężonych. Nie jest to trudne w przypadku małych wychyleń ze stanu równowagi. Opis dużych drgań następuje już znacznie większe kłopoty.

W tym artykule chcemy przedstawić zjawiska zachodzące w układzie kilkudziesięciu, kilkuset, a także nieskończenie wielu oddziaływających ze sobą identycznych wahadeł matematycznych. Na początek polecamy Czytelnikowi wykonanie modelu.

Bierzemy dość grubą elastyczną gumę — najlepiej służącą do napędu modeli latających o przekroju $1 \div 2 \text{ mm}^2$ i pudełko szpilek krawieckich z dużymi szklanymi łepkami. Naciągamy nieco gumę mocując ją prowizorycznie np. na stole i co $5 \div 10 \text{ mm}$ wbijamy szpilki, jak na rys. 1. Ważne, by wszystkie były wbite w jednej płaszczyźnie i były jednakowej długości. Następnie delikatnie zwalniamy naciąg i ... model gotowy.



Rys. 1



Rys. 2

Nasza okładka

Rysunki komputerowe na okładce przedstawiają ewolucję według równania sinus—Gordona (kolejno od prawego górnego rogu):

- zaburzenia w postaci dwóch załamania poruszających się na tle nieruchomego solitonu liniowego,
- breathera o kształcie eliptycznym,
- solitonu kołowego bez prędkości początkowej (po wstępnym kurczeniu się obiekt zaczyna się rozszerzać interferując z odbiciami od brzegu),
- solitonu kołowego zderzającego się z kołowym antysolitonem (proces jest symetryczny względem osi x i y , dlatego na rysunkach przedstawiono tylko jedną ćwiartkę),
- dwóch zderzających się solitonów.

Rysunki pochodzą z pracy: P. Christiansen, P. Lomdahl — *Physica* 2D, 482, 1981.

Rysunki zderzeń solitonów w artykule pochodzą z książki: G. Eilenberg, *Solitony*, Springer-Verlag (1981).

Trzymając gumę palcami za końce wywołujemy gwałtowny obrót jednego z nich o 360° . Wywołane w ten sposób zaburzenie rozchodzi się wzdłuż łańcucha wahadeł. Nasz model stanowi jedynie przybliżenie układu sprzężonych wahadeł matematycznych, ale wystarczająco dobre, aby ujawnić niektóre istotne cechy fal rozchodzących się w takiej strukturze. Zanim to zademonstrujemy, rozwiążmy problem teoretycznie.

Przy oznaczeniach jak na rys. 2, gdzie Δ oznacza odległość między wahadłami, m zaś jest gęstością liniową (g/cm), na k -te wahadło działa: składowa siły ciężkości $F_k = \Delta m g \sin \varphi_k$, gdzie Δm jest masą punktu materialnego na końcu wahadła, oraz momenty sił wynikające z oddziaływania wahadeł $k+1$ i $k-1$ na wahadło k -te. Oznaczmy je $M_{k,k+1}$ i $M_{k,k-1}$. Załóżmy, że to oddziaływanie jest proporcjonalne jedynie do różnicy ich wychyleń kątowych, tj. że $M_{k,k\pm 1} = \alpha(\varphi_{k\pm 1} - \varphi_k)/\Delta$, a współczynnik α charakteryzuje własności sprężyste gumy (dla drgań skrętnych).

Równanie ruchu k -tego wahadła

$$(1) \quad I(\Delta m l a_k) = -F_k + M_{k,k+1} + M_{k,k-1},$$

w którym a_k jest przyspieszeniem kątowym k -tego wahadła, a l jego długością, przyjmie postać

$$(2) \quad \Delta m l^2 a_k = -\Delta m g l \sin \varphi_k + \alpha(\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k)/\Delta,$$

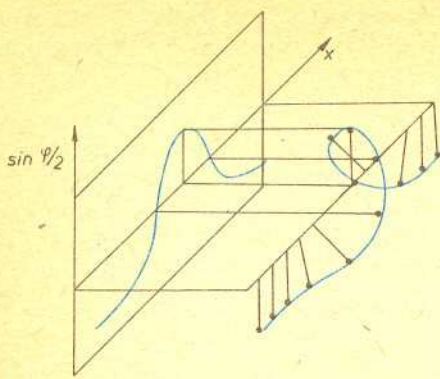
dla $k = 1, 2, \dots$

Ponieważ przyspieszenie kątowe jest drugą pochodną wychylenia względem czasu, ten układ równań można zapisać jeszcze inaczej:

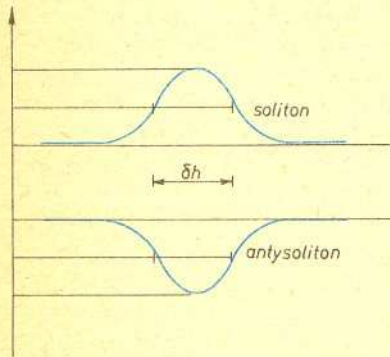
$$(3) \quad \frac{l}{g} \frac{d^2 \varphi_k(t)}{dt^2} = -\sin \varphi_k(t) + \frac{\alpha}{m g l} \frac{\varphi_{k+1}(t) + \varphi_{k-1}(t) - 2\varphi_k(t)}{\Delta^2}$$

Jest to układ równań różniczkowo-różnicowych opisujący własności ciągu wahadeł matematycznych oddziaływających ze sobą według najprostszej recepty: oddziaływanie dotyczy jedynie sąsiednich wahadeł i jest liniowe względem różnicy wychyleń.

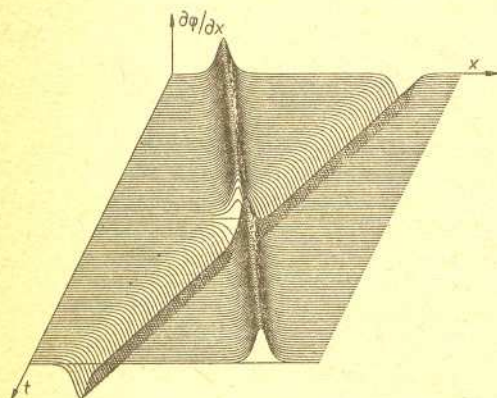
Gdy oddziaływanie sąsiednich wahadeł jest słabe, tj. gdy $\alpha \rightarrow 0$, układ ten zdąża do układu niezależnych równań opisujących drgania każdego z wahadeł osobno: $l/g \varphi_k''(t) = -\sin \varphi_k(t)$. Przy małych drganiach ($\varphi_k \ll 1$, φ_k mierzone w radianach) $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ i Czytelnik rozpozna wzór opisujący drgania oscylatora harmonicznego. Gdy „zageszczamy” wahadła,



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

zmniejszając równocześnie ich masę Δm tak, by gęstość m pozostawała stała, tzn. gdy przechodzimy do granicy $\Delta \rightarrow 0$, ostatni wyraz równania zdąża do $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, a całe równanie przyjmuje postać

$$(4) \quad \frac{l}{g} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = -\sin \varphi(x, t) + \frac{\alpha}{mgl} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2},$$

gdzie poszukiwana funkcja φ zamiast zależeć od numeru wahadła k , zależy teraz od współrzędnej x mierzonej wzdłuż łańcucha wahadeł i oczywiście także od czasu t . Dokonajmy jeszcze zabiegu kosmetycznego — wprowadźmy nowe skale czasu i odległości

$$(5) \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad \xi = \sqrt{\frac{mgl}{\alpha}} x,$$

a równanie przyjmie sławną postać

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \sin \varphi(\xi, \tau).$$

Jest to już równanie różniczkowe (cząstkowe) i nieliniowe, gdyż poszukiwana funkcja φ występuje w wyrazie $\sin \varphi$. Dlatego też nosi nieco dziwną nazwę: równanie sinus-Gordona (przez podobieństwo do innego sławnego równania Kleina-Gordona, identycznego niemal z (6), lecz bez operacji \sin). Równanie sin-Gordona było znane już geometrom w XIX wieku, ale prawdziwe zainteresowanie wzbudziło dopiero, gdy okazało się, że ma rozwiązania solitonowe (por. artykuły A. Kusza *Delta* 10/1981, S. Wojciechowskiego *Delta* 1/1983) i występuje w niezliczonej liczbie problemów fizycznych, takich jak zagadnienie wymuszonej przezroczystości ośrodka przy przechodzeniu silnych fal elektromagnetycznych, rozchodzenie się dyslokacji w kryształach, mechanizmy ruchu domen ferromagnetycznych, drgania w długich łańcuchach struktur organicznych, ruch wirów pól magnetycznych w tzw. złączach Josephsona i niektóre zagadnienia w teorii cząstek elementarnych.

Przyjrzyjmy się bliżej niektórym rozwiązaniom równania (6). Rozwiązań tych jest nieskończenie wiele i, o dziwo, „połowa” daje się przedstawić przez funkcje elementarne.

Można sprawdzić przez różniczkowanie, że jeśli

$$(7) \quad \ln \operatorname{tg}(\varphi/4) = \pm(k\xi \pm \omega\tau),$$

przy warunku $k^2 - \omega^2 = 1$, który da się zapisać jeszcze inaczej

$$(8) \quad k = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \omega = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

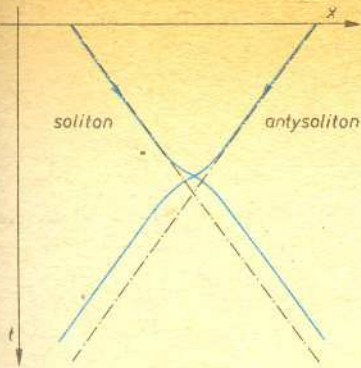
to φ jest rozwiązaniem równania (6); u — jest pewnym parametrem, $u < 1$, a znaki \pm przed nawiasem i w nawiasie w wyrażeniu (7) można przyjmować niezależnie, tzn. $++$, $+ -$, $- +$, $--$.

Na rysunku 3 zamiast funkcji φ wykreśliłmy funkcję

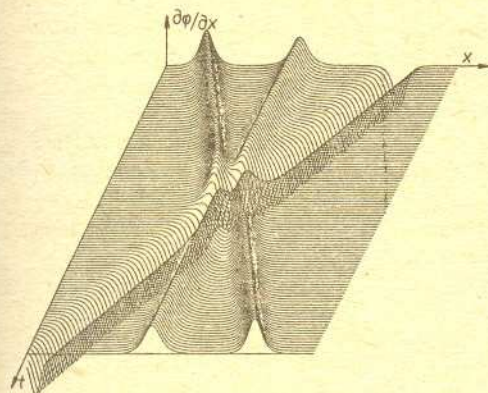
$$(9) \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\operatorname{ch}(k\xi \pm \omega\tau)}.$$

Ponieważ φ jest wychyleniem wahadła ze stanu równowagi, przeto $\sin(\varphi/2)$ przedstawia akurat obwiednię rzutu na płaszczyznę pionową końców szpilek w naszym modelu, gdy jeden z końców gumy zostanie skręcony o 360° względem drugiego. Odróżniać należy skręt zgodny z ruchem wskazówek zegara i skręt przeciwny, chociaż ich rzuty na płaszczyznę pionową wyglądają identycznie.

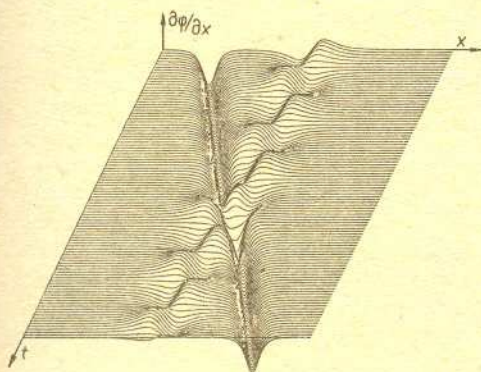
Stany te mogą być statyczne, gdy $\omega = 0$ i dynamiczne, gdy $\omega \neq 0$, a „skręt” porusza się z prędkością $\dot{\varphi} = \omega/k$. Szerokość „skrętu” w przypadku, gdy jest on nieruchomy, wynosi



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

$\delta h_{stat} \cong 1,32[\alpha/mg]^{1/2}$, natomiast gdy porusza się: $\delta h_{dyn} = \delta h_{stat} \sqrt{1-v^2/v_0^2} \leq \delta h_{stat}$, gdzie v_0 jest kresem górnym osiągniętych prędkości $v_0^2 = \alpha/ml^2$.

Fakt, iż obiekt poruszający się ulega skróceniu proporcjonalnie do $\sqrt{1-v^2/c^2}$ (skrócenie Lorentza) jest charakterystyczny dla zagadnień relatywistycznych i jest konsekwencją relacji (8). Łańcuch wahał stanowi więc także pewien model procesu relatywistycznego, choć ze szczególną teorią względności poza występowaniem pierwiastka nie ma nic wspólnego.

Zamiast wykresów $\sin(\varphi/2)$ wygodnie jest wykreślać $\partial\varphi/\partial x$, co zilustrowano na rysunku 4, gdyż wówczas obrazy skrętów przeciwnego i zgodnego z ruchem wskazówek zegara są różne. Dla przyjętego dodatniego kierunku kąta φ (rys. 2) pierwszy będzie dodatni, a drugi ujemny.

Obraz przestrzenny przedstawiający ewolucję w przestrzeni i w czasie rozwiązania zawierającego dwa takie obiekty przedstawia rys. 5. Z upływem czasu obiekt dodatni przesuwa się w prawo, ujemny — w lewo, aż do momentu zderzenia, po którym oba obiekty zamieniają się miejscami bez zmiany ich kształtu (a w tym przypadku także bez zmiany prędkości). Obiekty o tej własności noszą nazwę solitonów. Aby obiekty takie mogły pretendować do miana solitonów, musi zatem być ich przynajmniej dwa. Podstawową konsekwencją ich oddziaływania jest gwałtowne przesunięcie w chwili, gdy znajdują się blisko siebie, tak jak gdyby solitony o tej samej skrętności odpychały się, a solitony o przeciwnych skrętnościach — przyciągały. Dla pary obiektów o przeciwnych skrętnościach przyjęły się nazwy soliton i antisoliton. Wynik oddziaływania solitonu i antisolitonu z rys. 5 widać wyraźniej na rys. 6, gdzie wykreślono trajektorie ich wierzchołków — tzw. linie świata. Po zderzeniu linie świata pozostają równoległe do linii przed zderzeniem, lecz są przesunięte.

Rys. 7 przedstawia proces potrójny: zderzenie dwóch solitonów i antisolitonu. Czytelnik potrafi zapewne samodzielnie naszkicować odpowiednie linie świata. Należy podkreślić, że to, co przedstawiono na rysunkach 5 i 7, stanowi wykres dokładnego rozwiązania analitycznego równania (6), tak zwanych rozwiązań dwu i trój-solitonowych, a ponieważ równanie jest nieliniowe, wykresy te nie są oczywiście zwykłą sumą dwóch lub trzech rozwiązań jedno-solitonowych.

Oprócz wymienionych rozwiązań równanie sinus-Gordona dopuszcza jeszcze inny obiekt, tzw. breather (w wolnym tłumaczeniu: oddychacz). Odpowiada to stanowi związanemu: parze soliton-antisoliton, które pulsując poruszają się z jednakową prędkością i stanowią jeden obiekt. Rysunek 8 przedstawia właśnie zderzenie prawie nieruchomego breathera z antisolitonem.

Jak widać z przytoczonych rysunków, solitony mają wiele cech właściwych cząstkom materialnym, wiele reguł opisujących ich oddziaływania ma swoje odpowiedniki w dynamice ciał materialnych, a że stanowią one równocześnie dokładne rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych, przesądziło to o ich karierze w fizyce i matematyce.

A nasz gumowy model? Można na nim wytworzyć solitony, antysolitony, breathery, nawet stany wielosolitonowe i obserwować najprostsze zderzenia. Gdyby jednak solitony poruszały się nieco niemrawo, można spróbować zmniejszyć natężenie pola grawitacyjnego, ustawiając gumę skośnie, a nawet prawie pionowo, lub dobierając inne obciążenie szpilek.

Życzymy ciekawych eksperymentów!