Perypetie z MZK

Mgr Piotr
CHRZĄSTOWSKI

Dojeżdżałem przez cztery lata do szkoły. Na trasie miałem przesiadkę i każdy odcinek mogłem przejechać jednym z kilku autobusów. Zawsze, kiedy stałem na przystanku, fascynowały mnie związki pomiędzy czasem oczekiwania i liczbami wypisanymi na tabliczkach. Liczby te miały oznaczać częstotliwość kursowania autobusów.

Było to dla mnie oczywiste, że gdyby na przystanek dojeżdżał co 10 minut jeden autobus, a ja przyszedłbym w sposób losowy, to średnio czekałbym 5 minut. Na mój przystanek podjeżdżały jednak dwa odpowiadające mi autobusy — nazwijmy je R i S. R podjeżdżał co 10, a S — co 11 minut i nijak nie mogłem ani analitycznie, ani empirycznie ustalić wzoru, podającego średni czas oczekiwania na którykolwiek z nich.

W końcu rozwiązałem to zadanie tak:

W ciągu godziny przyjeżdża $\frac{60}{10}$ autobusów R oraz $\frac{60}{11}$ autobusów S. Łącznie $\frac{126}{11}$ autobusów obu linii, czyli tak jak gdyby w ciągu godziny jeździło $\frac{126}{11}$ autobusów jednej linii, dajmy na to S. Na karteczce dla autobusu S napisano by, że kursuje średnio co $\frac{11}{126}$ godziny, zatem czekałbym średnio połowę tego, czyli $\frac{11}{252}$ godziny. Z rozwiązania tego byłem bardzo zadowolony, gdyż otrzymane równanie ogólne przypominało mi równanie soczewki, a optykę wtedy wyjątkowo lubiłem.

Jako student zaproponowałem od niechcenia to samo zadanie na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa, okazało się wtedy, że mamy temat na dwa kolejne zajęcia. Niepoprawność mojego rozwiązania wyszła na jaw bardzo szybko. Po pierwsze, rozwiązanie zależy (przy założeniu rzetelności MZK) od punktu startowego całego „doświadczenia". Nie jest bowiem obojętne, czy autobusy R i S wyjadą rano z zajezdni jednocześnie, czy, dajmy na to, w odstępie półminutowym. Po drugie zaś założenie, że para autobusów R i S może być zastąpiona przez jeden autobus S kursujący regularnie co $\frac{11}{126}$ godziny jest błędne. Przerwy pomiędzy przyjazdami R i S są przecież z konieczności nieregularne. Może się na przykład zdarzyć, że oba przyjadą na przystanek jednocześnie i wtedy tracimy w globalnym rozrachunku jeden autobus. Po stwierdzeniu tych faktów okazało się, że choć wszyscy wiemy o co chodzi, to mamy duże trudności w samym sformułowaniu zadania w sposób precyzyjny. W końcu brzmiało ono tak:

Mamy dwie niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym: X na odcinku $[0, a]$ oraz Y na odcinku $[0, b]$, gdzie a i b oznaczają odstępy pomiędzy przyjazdami autobusów odpowiednio R i S (czyli w moim przypadku $a = 10$, $b = 11$ min.). Należy obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej

$$Z = min(X, Y).$$

Rozwiążmy to zadanie odwołując się do intuicji geometrycznych. Wyobraźmy sobie funkcję $f(x, y) = min(x, y)$ określoną na prostokącie $[0, a] \times [0, b]$. Nasze losowe przyjście na przystanek równoważne jest losowemu wyborowi punktu tego prostokąta, zaś współrzędne tego punktu określają, jak długo będziemy czekać na każdy z dwóch autobusów. Funkcja *min* odpowiada temu, że wsiądziemy do autobusu, który wcześniej przyjedzie.

Średnia wartość funkcji f jest to wysokość prostopadłościanu o podstawie $a \cdot b$ i objętości równej objętości bryły znajdującej się pod wykresem funkcji f.

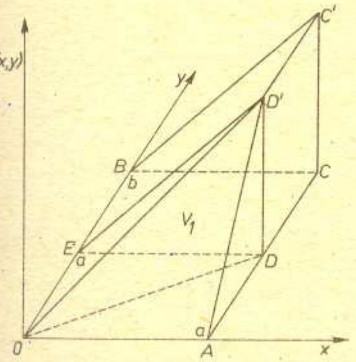
Załóżmy, że $b \geqslant a$. Na trójkącie OAD funkcja f przyjmuje wartość y, na pozostałym zaś obszarze prostokąta $OACB$ — wartość x. Powstałą bryłę można podzielić na dwa przystające ostrosłupy: $OADD'$ i $ODD'E$ oraz graniastosłup $EBC'D'DC$. Elementarne wyliczenie objętości jest łatwe:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 + \frac{1}{2} \cdot (b-a)a^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2b - \frac{1}{6} \cdot a^3,$$

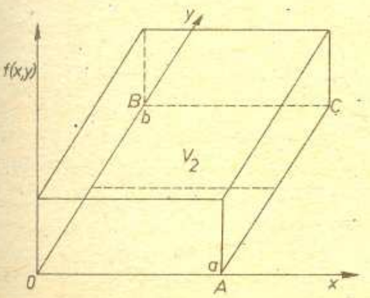
a wysokość szukanego (uśredniającego) prostopadłościanu wynosi

$$h = \frac{V}{ab} = \frac{1}{2}\,a\left(1 - \frac{a}{3b}\right);$$

w naszym przypadku $h = \frac{115}{33}$, czyli mniej niż 4 minuty.



$V_1 = V_2$



Postanowiłem spisać to wszystko czekając 25 minut na jeden z siedmiu środków komunikacji, z których każdy — zgodnie z rozkładem — powinien jeździć góra co 15 minut.