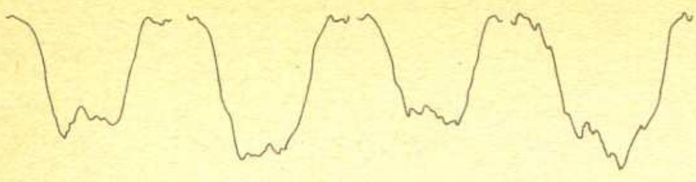
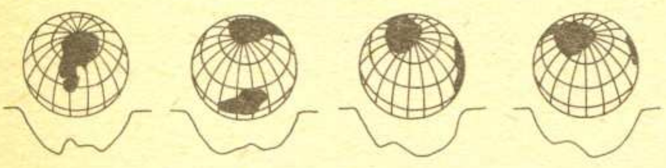
Załączone rysunki ilustrują obserwowane „wygryzienia" w liniach.



Po wykonaniu obliczeń okazało się, że na powierzchni gwiazdy istnieją dwie plamy: jedna położona na biegunie, a druga w pasie równikowym. Następny rysunek pokazuje tarczę gwiazdy widoczną w różnych fazach.



Pod każdą ilustracją zaznaczony został, tym razem schematycznie, odpowiedni profil, aby zilustrować odwzorowanie obrazu tarczy w kształcie linii. Plamy te, jak widać, w niczym nie przypominają plam słonecznych. Zwłaszcza biegunowa, ze względu na swe położenie nie ma swego odpowiednika na Słońcu. Plamy te nie mają praktycznie tzw. półcienia, który w przypadku plam słonecznych stanowi duży procent ich powierzchni. Jeśli w tych olbrzymich plamach półcień istnieje, to tylko w formie paska otaczającego ciemny obszar. Musi on być stosunkowo wąski, bo opisywana tu metoda nie może go rozróżnić.

Twórcy tej techniki obiecują w najbliższej przyszłości uzupełnić otrzymywane obrazy o jeszcze jedną ważną informację — natężenie pola magnetycznego w plamach. Będzie to najprawdopodobniej możliwe po takim zmodyfikowaniu aparatury obserwacyjnej, aby można było prowadzić pomiary linii widmowych przy użyciu polarymetru. Zrozumiałe jest, że taka informacja o polu magnetycznym, jego natężeniu i położeniu na gwieździe, byłaby niezwykle cenna dla badań teoretycznych tego typu zjawisk.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 91, 92, 93

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1984

91. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta. Łącząc odcinkami środki kolejnych jej boków otrzymujemy nową łamaną zamkniętą. Powtarzając tę operację wielokrotnie dostajemy ciąg łamanych zamkniętych. Zakładamy, że w żadnej z tych łamanych środki żadnych dwóch boków nie pokrywają się, a więc wszystkie łamane mają tę samą liczbę wierzchołków i boków. Udowodnić, że ciąg długości otrzymanych łamanych dąży do zera.

92. Czy trzema kwadratami o boku 5 można pokryć kwadrat o boku 2π?

93. Niech $x = m/n$ będzie ułamkiem nieskracalnym, $x \in (0, 1)$. Dowieść, że liczbę x można przedstawić w postaci sumy odwrotności co najwyżej $n-1$ różnych liczb naturalnych.

Zadanie 93 przysłał pan Jerzy Tyszkiewicz z Warszawy.

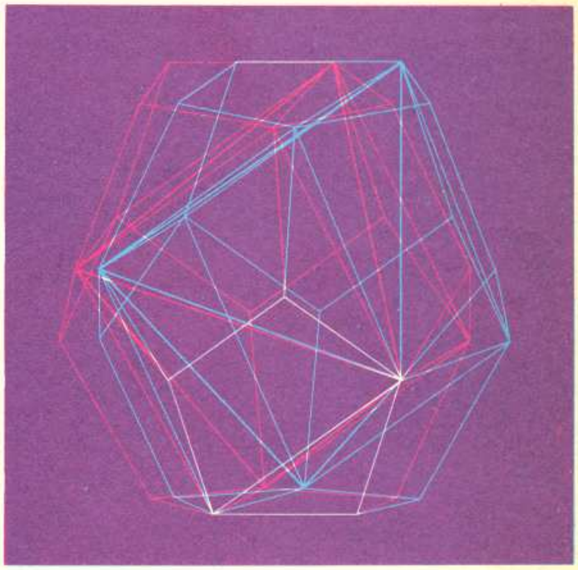
Przypominamy treść zadań:

85. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m, dla których odpowiedź na następujące pytanie jest jednoznaczna: Ile prostych poprowadzono na płaszczyźnie, jeśli wiadomo, że zbiór wszystkich punktów przecięcia tych prostych składa się z m punktów?

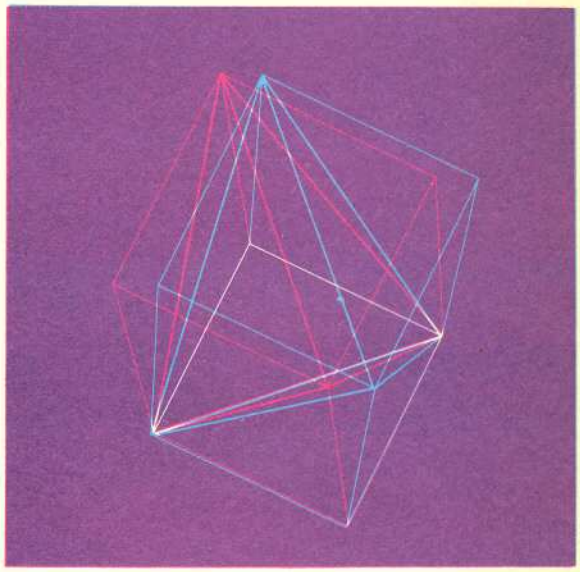
86. Obliczyć objętość największego czworościanu, który można umieścić w dwunastościanie foremnym o danej krawędzi a.

87. a) Czy prawdą jest, że jeśli $f:\langle 0, \infty) \to R$ jest dowolną funkcją taką, że dla każdej liczby $a \in \langle 0, 1)$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} f(a+n)$ i jej wartość nie zależy od wyboru a, to istnieje granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$? b) Czy odpowiedź zmieni się, jeśli dodatkowo założyć, że funkcja f jest ciągła?

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

85. Tylko dla $m = 2$ odpowiedź na postawione pytanie jest jednoznaczna (3 proste; jedyna możliwa konfiguracja to para prostych równoległych przeciętych trzecią prostą; łatwy dowód tego pomijamy). Gdy $m = 1$, można wziąć dowolną liczbę prostych przecinających się w jednym punkcie. Gdy natomiast $m > 2$, to weźmy $m-1$ punktów $P_1, \dots, P_{m-1}$ leżących na jednej prostej L_0 oraz pojedynczy punkt P_m poza tą prostą i poprowadźmy proste $L_i = prP_iP_m$ $(i = 1, \dots, m-1)$ oraz prostą L_m, równoległą do L_0 i przechodzącą przez P_m. Zbiór $\{P_1, \dots, P_m\}$ jest zbiorem wszystkich punktów przecięcia zarówno dla rodziny prostych $\{L_0, L_1, \dots, L_{m-1}\}$, jak i dla rodziny $\{L_0, L_1, \dots, L_{m-1}, L_m\}$.

86. Lemat. Spośród wszystkich czworościanów wpisanych w daną sferę największą objętość ma czworościan foremny.
Dowód. Istnienie największego czworościanu T wynika stąd, że objętość jest ciągłą funkcją położenia wierzchołków, a sfera jest zbiorem zwartym. Przypuśćmy, że T ma ścianę nie będącą trójkątem równobocznym. Przesuwając jeden z wierzchołków tego trójkąta (w jego płaszczyźnie) możemy zwiększyć jego pole, a tym samym — nie zmieniając położenia czwartego wierzchołka T — możemy zwiększyć objętość T, wbrew maksymalności (rys. 1).
Rozwiązanie zadania. Dwunastościan foremny D zawiera sześcian C, którego krawędziami są przekątne pewnych ścian D (rys. 2). Długość d przekątnej pięciokąta foremnego i długość boku a związane są wzorem $d = (1+\sqrt{5})a/2$. W sześcianie C o krawędzi d możemy umieścić czworościan foremny T o krawędzi $\sqrt{2}d$ (rys. 3). Na mocy lematu T jest największym czworościanem wpisanym w sferę opisaną na D, a więc i największym czworościanem zawartym w D. Ponieważ T powstaje z sześcianu C przez odcięcie czterech ostrosłupów o objętości $d^3/6$, zatem objętość T równa się $d^3/3 = (2+\sqrt{5})a^3/3$.

87. Odpowiedź na oba pytania jest przecząca. Jako kontrprzykład — do pytania b), a tym samym i do pytania a) — może służyć funkcja, która w każdym z przedziałów $I_n = \langle n, n+1/n\rangle$, $n = 1, 2, 3, \dots$, jest ciągła, przyjmuje wartość 0 na końcach I_n oraz wartość 1 w pewnym punkcie wewnątrz I_n i równa się zeru poza zbiorem $\cup I_n$.