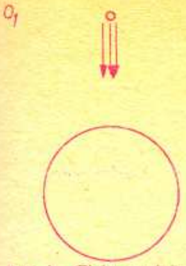
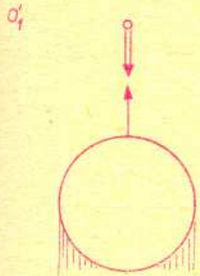
Zasada Macha

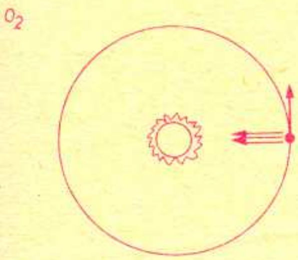
Dr Andrzej KRÓLAK



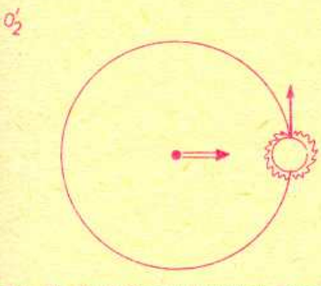
Rys. 1a. Ciało spadające w kierunku Ziemi. Siła grawitacyjna Ziemi (podwójna strzałka) powoduje przyspieszenie ciała (pojedyncza strzałka) zgodnie z drugim prawem ruchu.



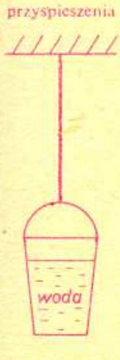
Rys. 1b. Ciało spoczywa w układzie O_2'. Siła grawitacyjna Ziemi nie wywołuje przyspieszenia ciała.



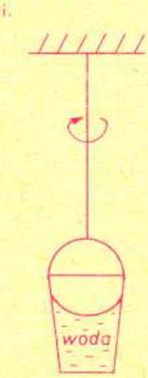
Rys. 2a. Ruch wokół Słońca. Prędkość Ziemi zaznaczono grubą strzałką. Przyspieszenie Ziemi (pojedyncza strzałka) jest skierowane w stronę Słońca zgodnie z kierunkiem siły grawitacyjnej Słońca.



Rys. 2b. Ruch Słońca względem Ziemi. Siła grawitacyjna Słońca nie wywołuje przyspieszenia Ziemi.



Rys. 3a



Rys. 3b

Austriacki filozof Ernst Mach (1836—1916) jako pierwszy dokonał konstruktywnego ataku na mechanikę Newtona. Twierdził on, że bezwładność ciała jest całkowicie wyznaczona przez otaczający je Wszechświat, a nie jak to zakładał Newton, jest jego wewnętrzną niezależną cechą.

Pojęcie bezwładności (inercji) ciała po raz pierwszy wprowadził Galileusz. Znalazło ono swoje matematyczne ujęcie w prawach ruchu Newtona. Zgodnie z drugim prawem siła działająca na ciało jest proporcjonalna do przyspieszenia tego ciała. Stała proporcjonalności jest miarą bezwładności ciała i jest nazywana masą inercjalną. Według Newtona masa inercjalna jest własnością ciała zupełnie niezależną od innych otaczających je ciał. Tak więc jeżeli F — siła, a — przyspieszenie, a m — masa, to drugie prawo ruchu ma postać

$$F = ma.$$

Przyspieszenie ciała ma ten sam kierunek i zwrot, co działająca na nie siła.

Powyższe równanie nie jest jednak prawdziwe we wszystkich układach odniesienia. Rozważmy dwa przykłady. Najpierw przypuśćmy, że ciało o masie m spada swobodnie na Ziemię. Na ciało to działa siła grawitacyjna F przyciągania ziemskiego. W układzie współrzędnych O_1 (rys. 1a) związanym z Ziemią zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$F = mg,$$

gdzie g — przyspieszenie grawitacyjne Ziemi.

Natomiast w układzie współrzędnych O_1', w którym ciało spoczywa, przyspieszenie ciała jest równe zeru, mimo że w dalszym ciągu działa na nie siła przyciągania ziemskiego (rys. 1b). Tak więc w układzie współrzędnych O_1' drugie prawo ruchu nie obowiązuje. Jako drugi przykład rozważmy ruch Ziemi wokół Słońca. Niech O_2 będzie układem odniesienia, w którym Słońce spoczywa, a Ziemia je obiega. W układzie tym przyspieszenie Ziemi jest zawsze skierowane w kierunku Słońca, a więc zgodnie z kierunkiem siły grawitacyjnej wywieranej przez Słońce na Ziemię (rys. 2a). Drugie prawo Newtona jest spełnione. Weźmy teraz układ odniesienia O_2', w którym Ziemia spoczywa. W układzie tym drugie prawo ruchu nie obowiązuje, ponieważ siła grawitacyjna Słońca nie wywołuje żadnego przyspieszenia Ziemi (rys. 2b). Tak więc nie można stosować drugiego prawa ruchu we wszystkich układach odniesienia. Układy, w których prawo to obowiązuje, nazywamy inercjalnymi.

Aby móc stosować swoje prawo również w nieinercjalnych układach odniesienia, Newton założył istnienie dodatkowych sił, zwanych siłami pozornymi lub inercjalnymi, nie pochodzących od obiektów materialnych. W nieinercjalnym układzie odniesienia obowiązuje zmodyfikowane prawo ruchu Newtona

$$F + P = ma,$$

gdzie P jest sumą sił pozornych.

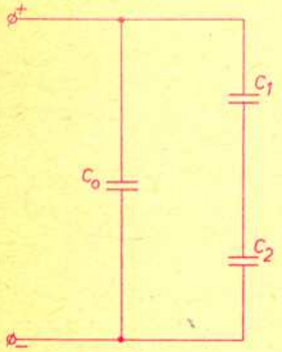
W układzie O_1' (w przykładzie powyżej) P jest siłą co do wartości równą sile przyciągania ziemskiego, ale skierowaną do niej przeciwnie. W układzie O_2' siłą pozorną jest dobrze znana siła odśrodkowa.

Powstaje pytanie, jak odróżnić układy inercjalne od nieinercjalnych? Aby odpowiedzieć na to pytanie, Newton założył istnienie przestrzeni absolutnej i określił inercjalne układy odniesienia jako takie, które nie mają przyspieszeń względem przestrzeni absolutnej. Zaproponował szereg doświadczeń, za pomocą których można wyznaczyć przyspieszenie względem przestrzeni absolutnej. Najbardziej znane jest doświadczenie z obracającym się wiadrem wody.

Weźmy wiadro zawieszone na linie i wypełnione wodą. Obracając wiadro skręcamy linę. Gdy lina jest dostatecznie skręcona, puszczamy wiadro. Przed puszczeniem wiadra powierzchnia wody jest płaska (rys. 3a). Po puszczeniu wiadro jest obracane przez linę. W miarę jak lina rozkręca się i prędkość kątowa wiadra jest coraz większa woda unosi się na brzegach wiadra i jej powierzchnia przybiera kształt paraboloidalny (rys. 3b). Po całkowitym rozkręceniu się liny następują drgania tłumione i w końcu wiadro nieruchomieje. Newton interpretował swoje doświadczenie w sposób następujący. Krzywizna powierzchni wody w wiadrze jest miarą jego prędkości kątowej względem przestrzeni absolutnej. Ten absolutny obrót nie ma nic wspólnego z obrotami względnymi. Na przykład zakrzywienie powierzchni wody nie zależy od prędkości kątowej ω wiadra względem wody. Gdy wiadro jest w spoczynku i powierzchnia wody jest płaska, to ω jest równa zeru. Prędkość kątowa ω jest również równa zeru, gdy wiadro obraca się i powierzchnia wody jest zakrzywiona.

Rozwiązanie zadania F 157. Wstawienie kondensatora do puszki powoduje przegrupowanie ładunku w obrębie jej ścianek oraz w samych okładkach kondensatora. W wyniku tworzy się układ płaskich, naładowanych przewodników równoważny układowi kondensatorów pokazanemu na rysunku. Gdy zaniedba się efekty brzegowe przy obliczaniu pojemności kondensatorów, mamy $C_1 \approx C_2 \approx C_0$ i pojemność zastępcza wzrasta do: $C_0 + \frac{C_0}{2} = \frac{3}{2} C_0$. C_0 — jest pojemnością kondensatora przed wsunięciem do puszki:

$$C_0 = \frac{s}{4\pi kd}.$$



C_0-pojemność kondensatora utworzonego z płyt *A* i *B*
C_1-pojemność kondensatora z płyt *AA'*
C_2-pojemność kondensatora z płyt *BB'*

Jednym z pierwszych, który poddał krytyce ideę przestrzeni absolutnej, był irlandzki filozof biskup George Berkeley (1685–1753). Odrzucił on istnienie przestrzeni absolutnej na podstawie tego, że jest ona nieobserwowalna. Twierdził on, że jest sens mówić o ruchu ciała tylko względem innych ciał materialnych. W przypadku doświadczenia z wiadrem za istotny element uważał ruch względem reszty Wszechświata, a w szczególności gwiazd stałych.

Ernst Mach poszerzył i pogłębił krytykę Berkeleya. Według niego doświadczenie Newtona z obracającym się wiadrem mówi nam, że ,,obrót wody względem brzegu wiadra nie wywołuje zauważalnych sił odśrodkowych, ale że takie siły są wywoływane przez jej obrót względem masy Ziemi i innych ciał niebieskich. Nikt nie może powiedzieć, jaki byłby wynik eksperymentu, gdyby wiadro miało taką masę, że jego grubość wynosiłaby kilka mil".

Według Macha woda w wiadrze w doświadczeniu Newtona nie unosiłaby się, gdyby nie było Ziemi i innych ciał niebieskich. Wiadro z wodą nie miałoby względem czego się obracać. Według niego zakrzywienie powierzchni wody w wiadrze mierzy jego prędkość kątową względem dalekich gwiazd, a nie względem przestrzeni absolutnej. W jego pojęciu przestrzeń absolutna w ogóle nie istnieje. Jest sens mówić tylko o ruchu jednych ciał względem drugich.

Te rozważania doprowadziły Macha do definicji układu inercjalnego jako takiego, który pozostaje w ruchu jednostajnym względem odległej materii we Wszechświecie. Twierdził on, że gdyby Wszechświat był pusty, nie można by było wprowadzić układów inercjalnych. Ruch cząstki próbnej w takim Wszechświecie byłby nieokreślony.

Mach w swojej krytyce mechaniki Newtona poszedł nawet dalej. Przypuśćmy, że w całym Wszechświecie istnieje tylko jedna cząstka i nie działają na nią żadne siły. W tym przypadku zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Jeżeli przyjąć punkt widzenia Newtona, to $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, co oznacza, że cząstka porusza się ze stałą prędkością. Natomiast zgodnie z punktem widzenia Macha, ponieważ Wszechświat jest pusty, cząstka nie ma względem czego się poruszać. W związku z tym ruch jej nie może być określony. Można to uzyskać przyjmując alternatywne rozwiązanie powyższego równania $m = 0$. Oznacza to, że w pustym Wszechświecie ciało może nie mieć masy. Wnioskiem Macha jest uznanie, że masa ciała jest całkowicie wyznaczona przez materię we Wszechświecie. Jako zasadę Macha przyjmiemy twierdzenie, że bezwładność ciała jest całkowicie wyznaczona przez otaczający je Wszechświat. Idee Macha zostały przyjęte ze znacznym sceptycyzmem. Utrzymywano, że prawa ruchu powinny być takie same dla wszystkich możliwych rozkładów materii i istnienie siły odśrodkowej nie powinno zależeć od tego czy istnieje, czy też nie materia na zewnątrz rozważanego układu. Zarzucano Machowi, że nie dał żadnej wskazówki co do postaci oddziaływania między dalekimi gwiazdami a lokalną materią.

Mimo to koncepcje Macha wywarły duży wpływ na Einsteina, gdy budował on swoją ogólną teorię względności (szczególnie krytyka Macha przestrzeni absolutnej). Właśnie Einstein wprowadził nazwę zasada Macha. Einstein jednak nieco inaczej rozwiązał problem istnienia układów inercjalnych. Zaobserwował on, że lokalnie nie można odróżnić sił grawitacyjnych od pozornych (jest to tzw. zasada równoważności). W szczególności spadający swobodnie, nieobracający się obserwator nie zauważy pola grawitacyjnego w swoim bezpośrednim sąsiedztwie. Sugeruje to utożsamienie układu inercjalnego ze swobodnie spadającym nieobracającym się obserwatorem.

Jest rzeczą zastanawiającą, że siły pozorne tak dokładnie naśladują siły grawitacyjne. Prostym wyjaśnieniem zasugerowanym przez Einsteina jest, że siły pozorne są również pochodzenia grawitacyjnego. Odpowiedź na pytanie, jakie są źródła tych sił grawitacyjnych, narzucały Einsteinowi idee Macha. Siły te są wyznaczone przez rozkład materii w całym Wszechświecie. Einstein miał nadzieję, że zasada Macha jest zawarta w ogólnej teorii względności. Okazało się jednak, że chociaż są rozwiązania równań Einsteina zgodne z zasadą Macha, to istnieją również rozwiązania całkowicie z nią sprzeczne. Podjęto wiele prób skonstruowania teorii grawitacji, w której zasada Macha byłaby spełniona. Jednym z pomysłów było znalezienie pewnych warunków na rozwiązania równań Einsteina (na przykład w postaci warunków brzegowych), które eliminowałyby rozwiązania niezgodne z zasadą Macha. Jak dotąd próby te nie doprowadziły do zadowalającej teorii.

Zasadę Macha można również spróbować potwierdzić doświadczalnie. Chodzi tu o zweryfikowanie jak dobrze nieobracający się układ odniesienia wyznaczony przez daleką materię we Wszechświecie jest zgodny z nieobracającym się układem wyznaczonym za pomocą metod lokalnych (w przypadku wiadra był to pomiar zakrzywienia powierzchni wody). W tym celu można posłużyć się odkrytym w 1965 roku przez Penziasa i Wilsona promieniowaniem mikrofalowym tła (nagroda Nobla w 1978 roku). Promieniowanie to powstało we wczesnym etapie rozwoju Wszechświata i można przyjąć, że układ odniesienia związany z tym promieniowaniem jest wyznaczony przez daleką materię we Wszechświecie. Pomiary zmian natężenia promieniowania tła w okresie 24 godzin pozwalają na pomiar prędkości Układu Słonecznego względem tego promieniowania. Obserwacje wykazały, że prędkość ta wynosi około 350 km/s.

Z drugiej strony możemy obliczyć prędkość Słońca wynikającą z rotacji Galaktyki za pomocą obserwacji astronomicznych. Prędkość ta jest równa około 250 km/s. Aby móc porównać obie otrzymane prędkości, należy jeszcze uwzględnić prędkości liniowe Słońca i samej Galaktyki, jak również udział Galaktyki w obrocie większych skupisk materii we Wszechświecie. Po uwzględnieniu tych efektów otrzymujemy znacznie lepszą zgodność obu pomiarów obrotu.

Punkt widzenia Macha nie jest przyjęty przez wszystkich fizyków ani nawet przez ich większość. Problem źródeł bezwładności jest ciągle jeszcze otwarty.

Nasz Czytelnik S. Łukiński pyta, na czym polegają trudności w rozszyfrowaniu tzw. szyfru optymalnego. Nie wchodząc w szczegóły szyfru (patrz *Delta* 1/1980) przypomnijmy, że do zaszyfrowania informacji wystarczy znajomość iloczynu dwóch liczb pierwszych — ten iloczyn jest powszechnie znany i każdy może wiadomość zaszyfrować — natomiast do rozszyfrowania konieczna jest znajomość obu czynników — zna je tylko adresat.

Czytelnik pisze: *Skąd szyfrant weźmie te dwie bardzo duże liczby pierwsze? Ja na przykład musiałbym zajrzeć do katalogu opublikowanych liczb pierwszych. Deszyfrant zajrzy do tego samego katalogu i sprawdzi wszystkie iloczyny. To, rzecz jasna, jest coś, co mi się tylko „wydaje", bo nie znam ilości „odkrytych" liczb pierwszych.*

W opublikowanym katalogu liczb pierwszych jest ponad 6 milionów liczb. Ale szyfrującemu nie opłaca się korzystać z tego katalogu — jest za mały. Wystarczy bowiem wykonać tyle dzieleń, ile liczb jest w tym katalogu, aby rozłożyć na czynniki iloczyn dwu liczb pierwszych (też z tego katalogu). A z takim zadaniem najszybsze komputery uporają się w kilka minut. Nie warto natomiast sprawdzać wszystkich iloczynów — aby je obliczyć, trzeba zamiast $6 \cdot 10^6$ wykonać $(6 \cdot 10^6)^2$ działań.

Wśród liczb mniejszych od N jest około $N/\ln N$ liczb pierwszych. Aby na pewno znaleźć jakiś czynnik pierwszy N, należy wykonać $\sqrt{N}/\ln\sqrt{N}$ dzieleń — mniej — jeśli szczęśliwie trafimy na czynnik liczby N. Gdy N jest iloczynem dwu liczb pierwszych, da to już nam rozkład N na czynniki pierwsze. Gdyby N miało (jak zaproponowano w artykule) około stu cyfr, to $\sqrt{N}/\ln\sqrt{N} > \sqrt{N}/300 > 10^{50}/300 > 10^{47}$. Jeśli nawet jesteśmy szczęściarzami i wystarczy nam 1/1 000 000 część maksymalnej liczby dzieleń, to i tak najszybszy komputer będzie dzielił przez ponad 10^{20} lat (bardzo „grube" oszacowanie z dołu).

Szyfrujący musi znaleźć dwie liczby pierwsze około pięćdziesięciocyfrowe, powiedzmy, mniejsze niż 10^{60}. Przeciętnie wśród $\ln 10^{60}$ takich liczb znajduje się liczba pierwsza. Ale $\ln 10^{60} < 200$, tak więc prawdopodobieństwo, że wśród 2000 kolejnych liczb (mniejszych niż 10^{60}) jest liczba pierwsza, jest większe od $1 - \frac{1}{2^{20}} > 0{,}999999$. Zważywszy, że możemy od razu odrzucić liczby parzyste oraz podzielne przez 3 i 5, wystarczy zbadać mniej niż 600 liczb. W artykule A. Kreczmara (*Delta* 6/1979) podany jest algorytm sprawdzający, czy liczba jest pierwsza. Komputer stosując ten algorytm w 10 minut sprawdził, które z liczb postaci $2^p - 1$ ($p \leqslant 500$) są pierwsze. Ale ponad 300 spośród tych liczb jest większych od 10^{60}. Tak więc używając tego samego komputera i algorytmu szyfrujący ma bardzo dużą szansę, że już po 40 minutach stanie się posiadaczem dwu „własnych" liczb pierwszych. Ważne jest przy tym to, iż algorytm może tylko sprawdzić, czy liczba jest pierwsza, natomiast nie poda czynnika liczby złożonej, jest więc bezużyteczny dla deszyfranta.

J. R.