Weźmy dowolną liczbę $\delta \in \mathbf{R}^*$, $\delta > 0$ taką, że $\delta \approx 0$. Wtedy dla dowolnej liczby hiperrzeczywistej x takiej, że $|x-x_0| < \delta$ mamy $x \approx x_0$, a stąd $f^*(x) \approx f^*(x_0)$. Zatem $|f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $\bigvee\limits_{\delta\in\mathbf{R}^*,\,\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$.

Z zasady Leibniza otrzymujemy tezę: $\bigvee\limits_{\delta\in\mathbf{R},\,\delta>0} \bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

W następnej kolejności wprowadzimy pojęcie pochodnej opierając się na intuicjach omówionych we wstępie. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną równą y_0, jeżeli dla każdej różnej od zera nieskończenie małej liczby h iloraz różnicowy $\dfrac{f^*(x_0+h)-f^*(x_0)}{h}$ jest nieskończenie bliski y_0. Zatem $f'(x_0) = st\left(\dfrac{f^*(x_0+\Delta x)-f^*(x_0)}{\Delta x}\right)$ dla $\Delta x \approx 0$, $\Delta x \neq 0$.

Wreszcie zajmiemy się pojęciem całki oznaczonej. Przypuśćmy, że w przedziale $[a, b]$ mamy określoną funkcję ciągłą f. Obieramy nieskończoną liczbę hipernaturalną ν i kładziemy $\delta = \dfrac{b-a}{\nu}$. Następnie dzielimy przedział $[a, b]^*$ (zauważamy, że $[a, b]^* = \{x \in \mathbf{R}^*: a \leqslant x \leqslant b\}$) na ν równych części o długości δ punktami $t_0 = a$, $t_1 = a+\delta$, $t_2 = a+h\delta, \dots, t_\nu = b$. Zauważamy, że oczywiście $\delta \approx 0$. Zgodnie z intuicją podaną we wstępie położymy teraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = st\Big(\sum_{i=0}^{\nu-1} f^*(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)\Big).$$

Na zakończenie należy stwierdzić, że analiza niestandardowa nie jest wyłącznie motywowaną filozoficznymi względami elegancką formalizacją oryginalnych idei Leibniza, ale stanowi silny aparat dowodowy. Z zasady Leibniza wynika, że dowolna własność liczb hiperrzeczywistych, dająca się sformułować w sposób dopuszczony przez tę zasadę, przysługuje również liczbom rzeczywistym. Dowód takiej własności stosujący metody niestandardowe jest zatem dowodem jej prawdziwości. Obecnie znamy już szereg twierdzeń udowodnionych po raz pierwszy właśnie przy użyciu analizy niestandardowej.

Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 371. Wykazać, że jedynym rozwiązaniem całkowitym równania $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ jest $x = y = z = 0$.
Rozwiązanie na str. 16

M 372. Na dwóch półprostych o początku O wybieramy punkty A, B tak, że $OA = OB+m$, gdzie m jest ustaloną liczbą dodatnią. Wykazać, że środki odcinków AB spełniających ten warunek leżą na pewnej półprostej.
Rozwiązanie na str. 10

M 373. Co jest większe: $\cos(\sin x)$ czy $\sin(\cos x)$?
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 156. Oszacować siłę działającą na ładunek q umieszczony w środku obojętnej elektrycznie, metalowej powłoki sferycznej o promieniu R i grubości ścianek Δ. W powłoce znajduje się niewielki otworek o promieniu r. Należy przyjąć: $r \ll R$ oraz $\Delta \ll r$.
Zadanie nadesłał p. Włodzimierz Zielicz.
Rozwiązanie na str. 3

F 157. Próżniowy kondensator płaski zbudowany jest z dwóch cienkich płyt o powierzchni s, odległych o d ($s \gg d^2$). Jak zmieni się pojemność kondensatora, gdy umieścimy go w metalowej puszce, której ścianki znajdują się w odległości $3d$ (patrz rysunek)?
Rozwiązanie na str. 12