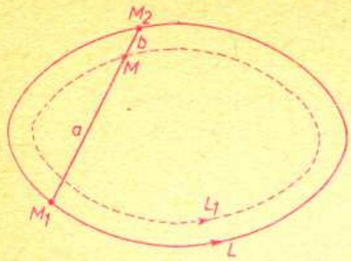
Twierdzenie Holditcha

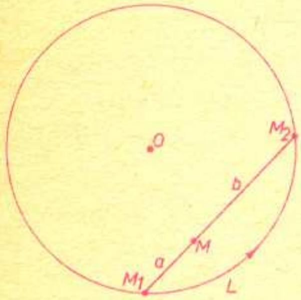
Prof. dr Petar KENDEROW, mgr Krasimir KOLAROW
(Bułgaria)



Rys. 1

W roku 1858 wielebny Hamnet Holditch, rektor Cajus College w Cambridge, opublikował ciekawe twierdzenie nazwane później twierdzeniem Holditcha.

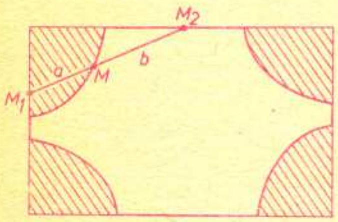
Rozpatrzmy płaską krzywą zamkniętą L i odcinek $M_1 M_2$ o długości $a+b\,(a > 0, b > 0)$, którego końce leżą na krzywej L (rys. 1). Niech M będzie takim punktem odcinka $M_1 M_2$, że $MM_1 = a$ i $MM_2 = b$. Jeśli będziemy przemieszczać odcinek $M_1 M_2$ tak, by oba jego końce leżały cały czas na krzywej L, a punkt M_1 obiegał tę krzywą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to punkt M zakreśli pewną krzywą zamkniętą L_1 (zaznaczona linią przerywaną). Twierdzenie Holditcha mówi, że różnica pól figur ograniczonych krzywymi L i L_1 równa jest πab. Nie zależy więc ona ani od kształtu, ani wielkości wyjściowej krzywej.



Rys. 2

Czytelnik z łatwością sprawdzi prawdziwość tego twierdzenia dla szczególnego przypadku, gdy krzywą L jest okrąg (rys. 2).

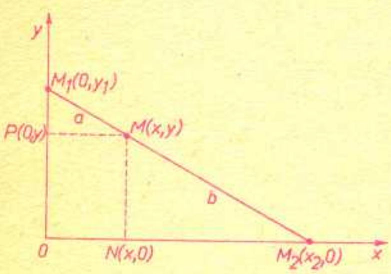
Dowód twierdzenia podany przez Holditcha nie był zupełnie ścisły, nie obejmował poza tym pewnych przypadków (na przykład takich krzywych jak brzeg kwadratu). Ścisły dowód przedstawił w 1978 roku szwedzki matematyk Arne Broman — dotyczył on krzywych ograniczających zbiory wypukłe. W roku 1981 Broman używając rachunku całkowego udowodnił twierdzenie dla szerszej klasy krzywych — w szczególności dla łamanych zamkniętych. Rozpatrzmy teraz kilka ciekawych przypadków.



Rys. 3

Jeśli przemieszczamy odcinek $M_1 M_2$ po krzywej L będącej brzegiem prostokąta o bokach dłuższych od $M_1 M_2$, to punkt M będzie przebiegał po krzywej zaznaczonej na rys. 3. Aby udowodnić twierdzenie Holditcha, musimy pokazać, że suma pól zakreskowanych figur równa jest πab. Ale każda z tych figur to ćwiartka elipsy. Aby to wykazać, umieśćmy prostokąt tak, by jego wierzchołek znalazł się w początku układu współrzędnych, a boki leżały na osiach (rys. 4). Z podobieństwa trójkątów PMM_1 i OM_2M_1 oraz trójkątów MNM_2 i M_1OM_2 mamy

$$\frac{x}{a} = \frac{PM}{MM_1} = \frac{OM_2}{M_1 M_2} \quad \text{i} \quad \frac{y}{b} = \frac{MN}{MM_2} = \frac{OM_1}{M_1 M_2}.$$

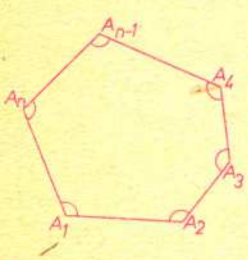


Rys. 4

Podnosząc do kwadratu i sumując otrzymujemy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{OM_1^2 + OM_2^2}{M_1 M_2^2} = 1.$$

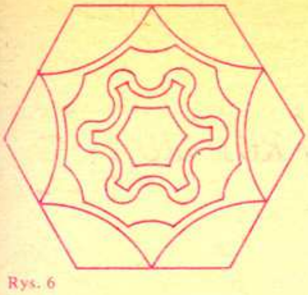
Tak więc współrzędne punktu M spełniają równanie elipsy o półosiach a i b. Wiadomo zaś, że pole takiej elipsy jest równe πab. Tak więc dowód twierdzenia w tym szczególnym przypadku został zakończony.



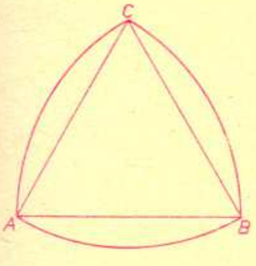
Rys. 5

Trudniejszy jest nieco bardziej ogólny przypadek, gdy krzywa L jest brzegiem wielokąta wypukłego. Zakładamy, że $a+b$ jest mniejsze od długości najkrótszego boku tego wielokąta (rys. 5). Figura, której pole mamy obliczyć, jest sumą zakreskowanych figur. Można wykazać, że każda z tych figur jest kawałkiem elipsy, ale tym razem są to różne elipsy i nie możemy z nich złożyć jednej. Za pomocą rachunku całkowego da się jednak udowodnić, iż pole części elipsy leżącej koło wierzchołka A_i jest równe $\frac{ab}{2}(\pi - \alpha_i)$, gdzie α_i jest miarą łukową kąta o wierzchołku A_i. Ale $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\pi$, a więc sumą pól jest

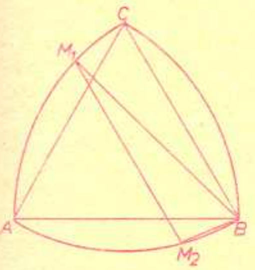
$$S = \frac{ab}{2}\Big((\pi - \alpha_1) + \ldots + (\pi - \alpha_n)\Big) = \frac{ab}{2}\Big(n\pi - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\Big) = \pi ab.$$



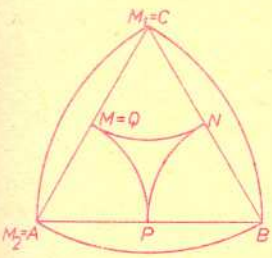
Rys. 6



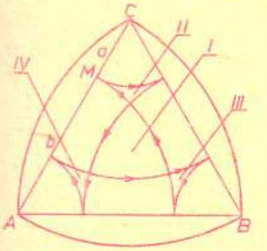
Rys. 7



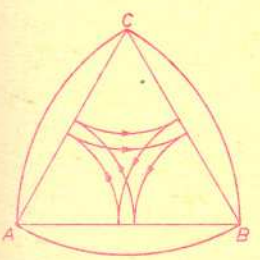
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Ten ostatni wynik, jak i pewne inne uogólnienia twierdzenia Holditcha zostały podane w pracy dyplomowej K. Kolarowa.

Jeśli pozbędziemy się warunku, by długość odcinka $M_1 M_2$ była mniejsza od długości najkrótszego boku wielokąta, to kształt krzywej L_1 bardzo się komplikuje. Na rysunku 6 pokazano kilka takich krzywych. Dla prostoty punkt M leży za każdym razem w środku odcinka $M_1 M_2$.

Przy pewnych krzywych L i odpowiednio dobranych długościach $a+b$ powstaje wątpliwość, czy twierdzenie Holditcha jest prawdziwe. Tak jest na przykład, gdy L jest brzegiem trójkąta Reuleaux, tzn. sumą trzech łuków $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ o środkach w wierzchołkach trójkąta równobocznego ABC i promieniach równych bokowi tego trójkąta (rys. 7).

Niech odcinek $M_1 M_2$ ma długość równą bokowi trójkąta. Jeśli punkt M_2 leży na łuku $\overset{\frown}{AB}$ (bez końców), to punkt M_1 musi pokrywać się z C. Nie może on, oczywiście, leżeć na łuku $\overset{\frown}{AB}$. Załóżmy, że leży na łuku $\overset{\frown}{AC}$ (rys. 8). Trójkąty $M_2 BM_1$ i $M_2 BC$ mają wspólny bok $M_2 B$ oraz $BC = BM_1 = M_1 M_2 = CM_2$, Zatem są one przystające i $M_1 = C$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy punkt M jest środkiem odcinka $M_1 M_2$ (rys. 9). Przypuśćmy, że w chwili początkowej $M_1 = C$ i $M_2 = A$. Gdy punkt M_2 przebiega łuk $\overset{\frown}{AB}$, punkt M zakreśla łuk $\overset{\frown}{QN}$ o środku C i promieniu równym połowie boku trójkąta. Następnie punkt M_2 pokrywa się z B, a M_1 przebiega łuk $\overset{\frown}{CA}$ — punkt M zakreśli łuk $\overset{\frown}{NP}$. Dalej punkt M_1 jest nieruchomy w A, M_2 zaś porusza się po $\overset{\frown}{BC}$ — otrzymujemy łuk $\overset{\frown}{PQ}$. W tym momencie punkt M powrócił do punktu Q i odcinek $M_1 M_2$ zajął poprzednie położenie, ale punkty M_1 i M_2 zamieniły się miejscami. Aby przywrócić położenie początkowe, musimy cały cykl powtórzyć jeszcze raz.

Pole S trójkąta Reuleaux jest równe różnicy potrojonego pola wycinka kołowego $\left(\text{dla kąta } \frac{\pi}{6}\right)$ i podwojonego pola trójkąta równobocznego. Jeśli bok trójkąta jest równy 2, to $S = 2\pi - 2\sqrt{3}$. Pole S_1 figury F ograniczonej łukami $\overset{\frown}{QN}$, $\overset{\frown}{NP}$, $\overset{\frown}{PQ}$ otrzymamy odejmując od pola trójkąta pole trzech wycinków kołowych. Tak więc $S_1 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$. Pole to musimy odjąć od S dwukrotnie. Mamy

$$S - 2S_1 = 3\pi - 4\sqrt{3} \neq \pi.$$

Spróbujmy wyjaśnić powstałą wątpliwość. Zauważmy, że dla okręgu, prostokąta i wielokąta punkt M poruszał się po krzywej L_1 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, natomiast w ostatnim przykładzie punkt M obchodził figurę F dwukrotnie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Aby rozróżnić te dwa przypadki, w matematyce wprowadza się pojęcie pola powierzchni zorientowanej. Przyjmuje się je za ujemne, gdy punkt M porusza się ruchem zgodnym ze wskazówkami zegara i za dodatnie — gdy w przeciwnym. A więc w ostatnim przykładzie musimy obliczyć wielkość

$$S - (-2S_1) = 2\pi - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \pi.$$

Teraz się zgadza, otrzymaliśmy π.

Jeśli punkt M nie leży w środku odcinka $M_1 M_2$, to może powstać jeszcze ciekawsza sytuacja (rys. 10). Tu odległość CM spełnia nierówność $0 \leqslant CM \leqslant \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3})$. Punkt M obchodzi cztery zbiory, przy czym zbiór I ma powierzchnię dodatnią, a II, III i IV ujemną. Czytelnik łatwo sprawdzi, że twierdzenie Holditcha pozostaje prawdziwe. Jest tak również w sytuacji z rys. 11. Tu długość CM spełnia nierówności $\frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) \leqslant CM \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Czytelnik z pewnością zgodzi się z Bromanem, który powiedział: „twierdzenie Holditcha jest znacznie głębsze niż myślał sam Holditch w roku 1858".