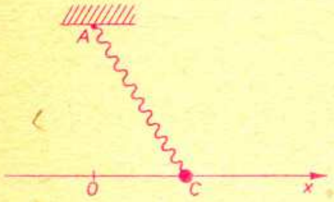
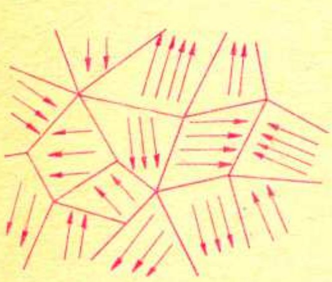
Rozwiązanie zadania M 371. Rozpatrzmy równanie ogólniejsze $x^2+y^2+z^2 = 2^\alpha xyz$, gdzie α jest liczbą naturalną. Oczywiście możemy ograniczyć się do szukania rozwiązań tego równania w liczbach całkowitych nieujemnych (pozostałe rozwiązania otrzymamy przez zmianę znaku dwóch niewiadomych). Jest oczywiste, że wśród liczb x, y, z spełniających to równanie albo wszystkie, albo dokładnie jedna są parzyste. Ten drugi przypadek jest jednak niemożliwy, gdyż kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1 ($(2a+1)^2 = 4a(a+1)+1$), a więc lewa strona dawałaby 2, prawa zaś 0. Tak więc wszystkie liczby x, y, z są parzyste: $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, i podstawiając do równania otrzymujemy $x_1^2+y_1+z_1^2 = 2^{\alpha+1}x_1y_1z_1$. Podobnie wykazujemy, że x_1, y_1, z_1 są parzyste itd. Tak więc x, y, z są podzielne przez dowolną potęgę liczby 2, a zatem $x = y = z = 0$.



Rys. 1


Rys. 4

Z czego śmieje się redakcja

Niesiony do karetki pogotowia motocyklista, który kilkanaście minut temu rozbił się o drzewo, jęknął: „Jak to dobrze, że dzieli się przez dwa" i stracił przytomność. Wstrząs mózgu — orzekł lekarz. I to poważny — stwierdził, gdy po odzyskaniu przytomności chory z maniackim uporem wciąż powtarzał swoje: „Jak to dobrze, że dzieli się przez dwa". Po dwóch dniach sprawa stała się naprawdę niepokojąca. Wreszcie kierujący zebranym przy łóżku konsylium docent zaryzykował pytanie: „Co się dzieli?". „mv^2" — brzmiała odpowiedź.

Opowiedział nam Jerzy Bednarczuk (Warszawa).

Spontaniczne łamanie symetrii

Wiele teorii fizycznych ogranicza się do rozważania niewielkich odchyleń od stanu równowagi. Równania opisujące ruch są w takim przybliżeniu liniowe i najczęściej łatwe do rozwiązania. Teoria transportu, na przykład, opisuje niewielkie odchylenia od stanu równowagi termodynamicznej, a kwantowa teoria pola procesy zachodzące między cząstkami elementarnymi, czyli niewielkimi zaburzeniami stanu o najniższej energii, zwanego próżnią. Wydawać by się mogło, że stan równowagi jest prosty i symetryczny, a w szczególności ma wszystkie symetrie układu fizycznego. I rzeczywiście na ogół tak jest. Istnieje jednak wiele ciekawych wyjątków.

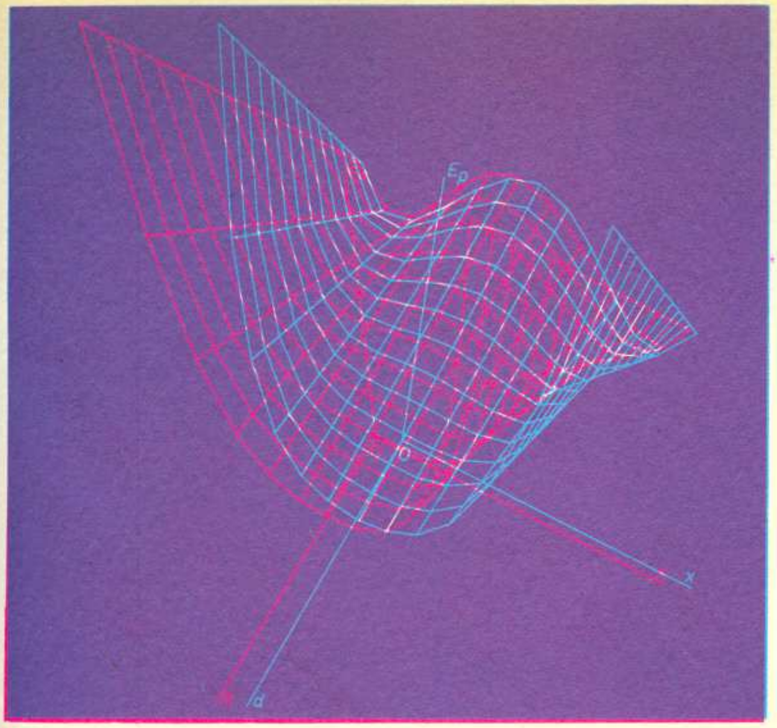
Dla przykładu rozważmy prosty układ mechaniczny (rys. 1). Kulka na sprężynie, zamocowanej w punkcie A, może poruszać się tylko po prostej Ox. Sprężyna może być rozciągana lub ściskana. Czytelnik z łatwością wyznaczy zależność energii potencjalnej sprężyny od położenia kulki $x = OC$ i odległości $AO = d$ (rys. 2). Dla $d > l_0$ (l_0 długość swobodnej sprężyny) sprężyna jest rozciągana i energia ma minimum dla minimalnej odległości AC. Stan równowagi $x = O$ jest w tym przypadku, podobnie jak cały układ, symetryczny względem prostej AO. Dla $d < l_0$ minimum energii potencjalnej odpowiada oczywiście warunkowi $AC = l_0$, czyli pojawiają się dwa minima o tej samej „głębokości". Przy przejściu przez taki punkt A, że $d = l_0$ stan równowagi traci „spontanicznie", tj. bez ingerencji zewnętrznych sił, symetrię względem odbić.

Opisaną własność ma stan podstawowy wielu układów fizycznych. Przy przejściu magnetyka ze stanu paramagnetycznego, w którym elementarne momenty magnetyczne ułożone są chaotycznie, a więc żaden kierunek w przestrzeni nie jest wyróżniony, do stanu ferromagnetycznego, pojawia się spontanicznie makroskopowe namagnesowanie, a więc ginie symetria sferyczna. Układ przechodzi w jeden z nieskończenie wielu równoważnych stanów podstawowych. Zależność energii swobodnej od magnetyzacji dla dwuwymiarowego magnetyka przedstawiona jest na rys. 3a. Warto dodać, że ferromagnetyk podzielony jest na makroskopowe obszary (domeny) i w każdym z nich symetria jest łamana w inny sposób, tzn. inny jest wyróżniony kierunek magnetyzacji (rys. 4). Uśredniona po wielu domenach magnetyzacja jest więc równa zeru. Jeśli ferromagnetyk znajduje się w zewnętrznym polu magnetycznym, to energia swobodna ma przebieg przedstawiony na rys. 3b. Magnetyzacja w domenach ma teraz kierunek zewnętrznego pola.

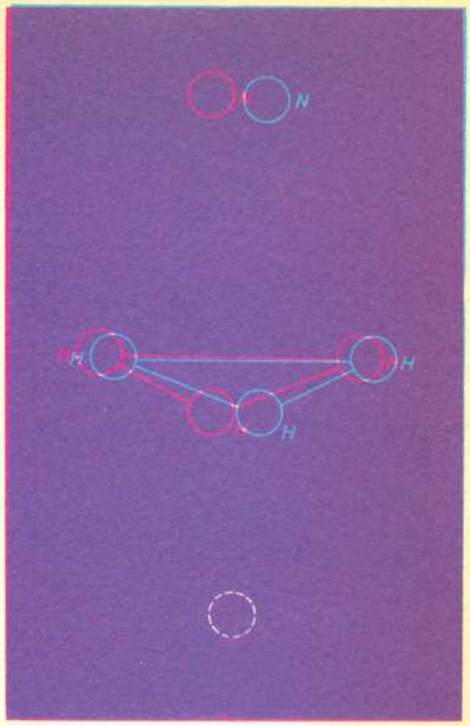
Spontanicznie złamana symetria może być przywrócona przez efekty kwantowe. Atom azotu w cząsteczce amoniaku (NH_3) ma dwa możliwe (klasyczne) stany równowagi (rys. 5), podobnie jak opisana wyżej kulka na sprężynie. Tym razem jednak możliwe jest przejście z prawego minimum do lewego w wyniku kwantowego tunelowania, które dopuszcza przenikanie cząstek przez nieprzenikliwe z punktu widzenia mechaniki klasycznej bariery. Powoduje to, że stan, w którym atom azotu zlokalizowany jest w pobliżu jednego z minimów, nie tylko nie jest stanem podstawowym, ale jego energia nie jest nawet określona. W stanie podstawowym atom średnio tyle samo czasu przebywa po prawej i po lewej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez atomy wodoru. W ten sposób kwantowe tunelowanie powoduje, że stan podstawowy jest równie symetryczny, jak cały układ.

Istnieją jednak układy kwantowe ze spontanicznym łamaniem symetrii. Jednym z nich jest stan podstawowy w teorii cząstek elementarnych, czyli próżnia. Próżnia oznacza tutaj brak wzbudzeń pola kwantowego, czyli brak cząstek. Przy skomplikowanym (nieliniowym) oddziaływaniu między polami może się zdarzyć sytuacja analogiczna do poprzednio opisanych, tj. pole może mieć wiele stanów podstawowych o tej samej gęstości energii. Spontaniczny wybór jednego z nich łamie niektóre symetrie układu. Przywrócenie wyjściowej symetrii nie jest w tym przypadku możliwe, bo dla układów o nieskończonej objętości bariera energetyczna dzieląca oba stany podstawowe jest nieskończenie wysoka i tunelowe przejście między próżniami nie występuje. W zasadzie próżnia mogłaby mieć, podobnie jak ferromagnetyk, strukturę domenową. Wydaje się jednak, że w rzeczywistości tak nie jest. Ściany między domenami miałyby bowiem wielką masę, wiele razy większą od masy wszystkich obserwowanych ciał niebieskich. Wystarczyłaby jedna taka ściana przecinająca Wszechświat, aby istotnie zaburzyć obserwowaną izotropowość promieniowania reliktowego.

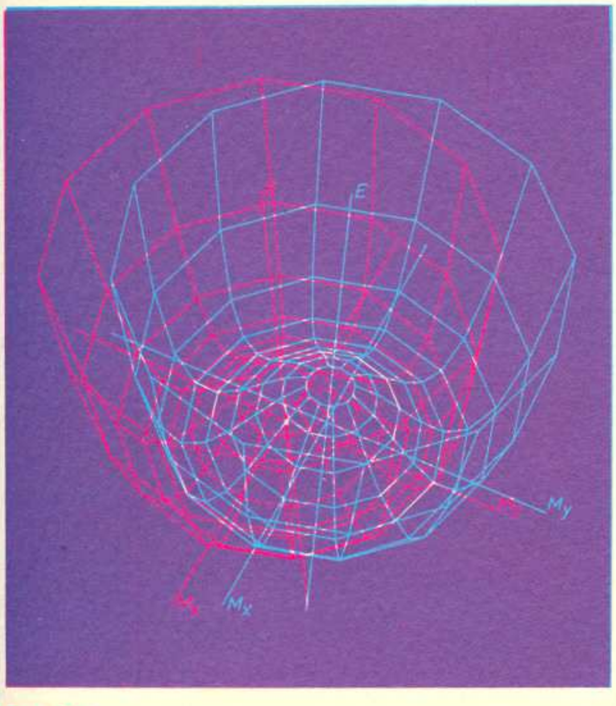
M. J.



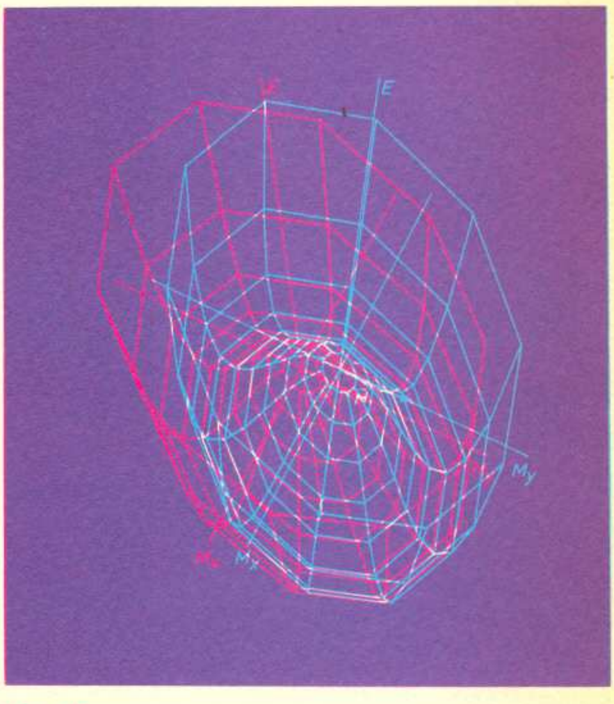
Rys. 2



Rys. 5



Rys. 3a



Rys. 3b