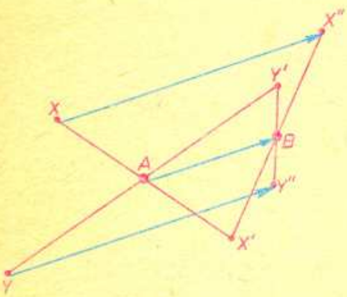
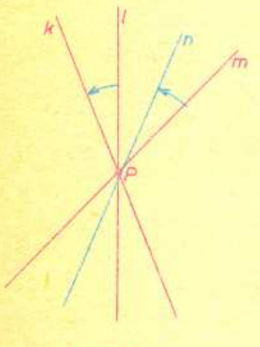
Program Leibniza i system Bachmanna

Rozwiązanie zadania M 372. Niech a i b będą wektorami jednostkowymi leżącymi na półprostych Op i Oq, odpowiednio. Wówczas środkiem odcinka o końcach $A = ta + ma$, $B = tb$ jest punkt

$C = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}t(a+b) + \frac{m}{2}a$, skąd

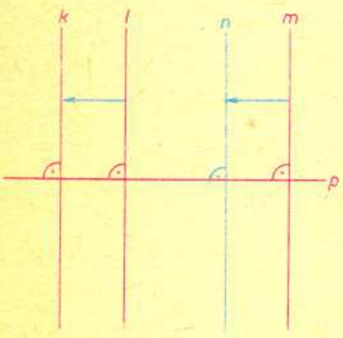
widać, że przy zmieniającym się t punkt C leży na półprostej równoległej do dwusiecznej kąta między danymi półprostymi i wychodzącej z punktu $\frac{m}{2}a$.





$k \cdot l \cdot m = n$

Prostą n można znaleźć odkładając od prostej m kąt lk. Dlaczego?



$k \cdot l \cdot m = n$

Prostą n można znaleźć odkładając od prostej m wektor lk. Dlaczego?

Polskiego tłumaczenia tej książki dotąd nie ma. Jest natomiast dostępne w bibliotekach tłumaczenie rosyjskie:
Построение геометрии на основе понятия симметрии.

Gdy Kartezjusz stworzył geometrię analityczną (tj. sposób uprawiania geometrii za pomocą rachunków na współrzędnych punktów), sprowadzając ją tym samym do pozycji jednego z działów arytmetyki, wybuchł wielki entuzjazm. Okazało się, że cały szereg nie rozwiązanych problemów udało się tymi nowymi metodami rozwiązać. A przecież w nauce nie chodzi o to, jakich (byle oczywiście poprawnych) metod używamy, tylko o rezultaty.

Nie wszyscy jednak byli tego zdania. Gottfried Wilhelm Leibniz miał poważne obawy, czy arytmetyzacja geometrii nie spowoduje, że będzie się w niej rozpatrywać przeważnie, a może jedynie, te tylko problemy, które dobrze poddają się arytmetyzacji. Dziś, po upływie ponad trzech stuleci, wielu sądzi, że tak właśnie się stało, jak to ,,wykrakał'' Leibniz, ze szkodą dla najstarszej gałęzi nauki — geometrii. Leibniz nie miał nic przeciwko rachunkom, twierdził jednak, że jeśli chcemy w geometrii rachować, to rachujmy na obiektach geometrycznych. Zdanie to, zwane programem Leibniza, uznano jednak za przesadny puryzm metodologiczny po pierwsze dlatego, że geometria analityczna święciła triumfy, po drugie dlatego, że nikt nie wiedział, o jakie to geometryczne rachunki mogłoby chodzić.

Pod koniec XIX wieku idea Leibniza ożyła. Duński matematyk Hjelmslev wskazał obiekty geometryczne, na których można było rachować. Zauważył mianowicie, że punkty stałe inwolucji będących podobieństwami w przestrzeni, np. euklidesowej, tworzą podprzestrzenie tej przestrzeni (wyjaśnienie: inwolucja to przekształcenie odwrotne do samego siebie).
Istotnie: jedyne inwolucje (co łatwo stwierdzić przez przegląd wszystkich podobieństw) to symetrie środkowe (jeden punkt stały), symetrie osiowe (prosta punktów stałych) i symetrie płaszczyznowe (płaszczyzna punktów stałych). Jak rachować na przekształceniach — wiadomo — można je składać (wykonywać kilka po kolei).

Stworzoną przez Hjelmsleva możliwość podchwycił Kurt Reidemeister wskazując, jak pięknie i prosto można opisać szereg faktów geometrycznych za pomocą takich rachunków. Traktujmy punkt A jako to samo, co symetria środkowa o środku w A, prostą k — jako to samo, co symetria osiowa o osi k (ograniczymy się dalej do geometrii płaszczyzny). Zatem $A \cdot B$ to złożenie symetrii względem A i względem B, czyli przesunięcie o wektor $2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Wszelkie zaś równości to już fakty geometryczne. Na przykład $A \cdot B = C \cdot D$ mówi, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Podobnie $A \cdot B \cdot C = D$ oznacza, że $ABCD$ jest równoległobokiem: istotnie mamy

$$A \cdot B \cdot C \cdot C = D \cdot C,$$

a ponieważ $C \cdot C$ to identyczność (C jest przecież inwolucją), więc

$$A \cdot B = D \cdot C,$$

co oznacza, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że

$$k \cdot l = l \cdot k \quad \text{i} \quad k \neq l$$

oznacza, że k i l są prostopadłe, oraz że

$$A \cdot k = k \cdot A$$

mówi, iż punkt A leży na prostej k.

Geometria daje się więc opisać zgodnie z programem Leibniza, choć Reidemeister nie umiał jeszcze tego w pełni zrealizować. Umiał natomiast zapalić do tej idei swoich licznych uczniów. Ich prace dostarczały coraz to nowych reguł hjelmslevowskich rachunków. Punktem przełomowym były tu dwa twierdzenia udowodnione w 1941 roku przez Arnolda Schmidta:

dla dowolnych trzech prostych k, l, m mających wspólny punkt (wspólną prostopadłą) istnieje taka prosta n, że $k \cdot l \cdot m = n$,

co formalnie można zapisać tak:

$$\bigwedge_{k,l,m,P} \bigvee_{n} k \cdot P = P \cdot k \wedge l \cdot P = P \cdot l \wedge m \cdot P = P \cdot m \Rightarrow k \cdot l \cdot m = n,$$

$$\bigwedge_{k,l,m,p} \bigvee_{n} k \cdot p = p \cdot k \wedge l \cdot p = p \cdot l \wedge m \cdot p = p \cdot m \wedge \neq (k,l,m,p) \Rightarrow k \cdot l \cdot m = n.$$

I dalej już poszło szybko. W 1959 roku Friedrich Bachmann opublikował piękną i bogatą monografię ,,Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff'', w której przedstawił geometrię wyłożoną właśnie w sposób wymarzony przez Leibniza — jako opisane wyżej geometryczne rachunki. W Niemczech ten sposób do tego stopnia stał się popularny, że chyba niedaleka jest chwila, gdy stanie się on tam sposobem nauczania geometrii w szkołach.

M. K.