Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 88, 89, 90

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1984

88. Jeden z kątów trójkąta T ma miarę 120°. Niech T' będzie trójkątem, którego wierzchołkami są punkty przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta T z przeciwległymi bokami. Dowieść, że trójkąt T' jest prostokątny.

89. Który z płaskich przekrojów sześcianu ma największe pole?

90. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2+y^2+z^2 = x^2y^2$ w liczbach całkowitych.

Zadanie 90 przysłał pan Jarosław Cel z Końskich.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 2/1984

Włodzimierz Szymczyk	- Zielonka	43,74pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	42,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	41,81pkt
Jerzy Milczarek	- Gorzów Wkp	41,62pkt
Wojciech Olszewski	- Brwinów	40,35pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,54pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	38,06pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	36,80pkt

Współczynniki trudności zadań 76, 77, 78:

3,62 3,06 1,32

Rozwiązania zadań z numeru 4/1984

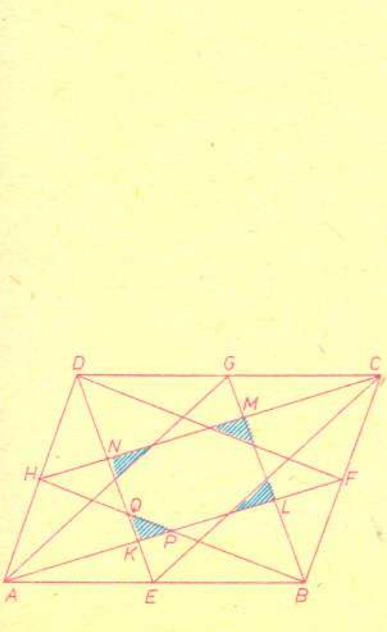
Przypominamy treść zadań:

82. Po krawędziach sześcianu pełza żuk. Na przejście jednej krawędzi zużywa minutę. Znalazłszy się w wierzchołku wchodzi na jedną z trzech krawędzi wychodzących z tego wierzchołka, z równym prawdopodobieństwem wyboru. Niech A i Z będą przeciwległymi wierzchołkami sześcianu. W chwili $t = 0$ żuk znajduje się w wierzchołku A. Czas, po którym żuk po raz pierwszy znajdzie się w wierzchołku Z, jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

83. Każdy z wierzchołków równoległoboku o danym polu S połączono odcinkami ze środkami boków wychodzących z przeciwległego wierzchołka. W środku równoległoboku odcinki te tworzą ośmiokąt. Obliczyć jego pole.

84. Czy istnieje liczba naturalna, której każda wielokrotność ma albo wszystkie cyfry parzyste, albo wszystkie cyfry nieparzyste?

82. Oznaczmy wierzchołki sąsiadujące z A przez B_1, B_2, B_3, a wierzchołki sąsiadujące z Z — przez C_1, C_2, C_3. Zauważmy, że po dowolnej parzystej liczbie ruchów żuk znajduje się w jednym z wierzchołków C_i lub A, zaś po nieparzystej liczbie ruchów — w B_i lub Z. Zatem czas, po którym żuk po raz pierwszy dotrze do wierzchołka Z, wyraża się liczbą nieparzystą. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że czas ten będzie równy $2n+1$ (minut), a więc, że w momentach $t = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ żuk będzie się znajdował w pozycji B (tj. w jednym z wierzchołków B_i), a w momencie $t = 2n+1$ — w pozycji Z. Zatem $p_n = p^{n-1}(1-p)$, gdzie p jest prawdopodobieństwem tego, że żuk, będąc w pozycji B, po dwóch ruchach znów będzie w pozycji B; podany wzór na p_n wynika stąd, że w chwili $t = 1$ żuk jest na pewno w pozycji B, przez dalszych $n-1$ par ruchów powraca do B, a w kolejnej parze ruchów przechodzi do Z. Obliczymy p. Z pozycji B żuk może z prawdopodobieństwem 1/3 przejść do A i następnie z prawdopodobieństwem 1 do B, lub też z prawdopodobieństwem 2/3 przejść do C i następnie z prawdopodobieństwem 2/3 znów do B. Stąd $p = (1/3)\cdot 1+(2/3)\cdot(2/3) = 7/9$, czyli $p_n = (7/9)^{n-1}(2/9)$. Rozważana zmienna losowa przyjmuje wartość $2n+1$ z prawdopodobieństwem p_n, a zatem jej wartość oczekiwana równa się $E = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)p_n$. Przy sumowaniu tego szeregu korzystamy z wzorów $\sum x^{n-1} = (1-x)^{-1}$ i $\sum nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$ dla $|x| < 1$; tu $x = 7/9$. Wynik obliczeń: $E = 10$.



83. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zachodzą następujące proporcje: $AK:AF = 2:5$, $AP:AF = 1:2$ (a stąd $KP:AP = 1:5$); $HQ:HB = 1:3$, $HP:HB = 1:2$ (a stąd $QP:HP = 1:3$); $S_{KPQ}:S_{APH} = (KP:AP)\,(QP:HP) = 1:15$, $S_{APH} = S_{ABFH}/4 = S/8$, więc $S_{KPQ} = S/120$. Dalej, $S_{ABL}:S_{ABF} = AL:AF = 4:5$, $S_{ABF} = S/4$, więc $S_{ABL} = S/5$ i analogicznie $S_{BCM} = S_{CDN} = S_{DAK} = S_{ABL} = S/5$. Zatem równoległobok $KLMN$, powstały z $ABCD$ przez odcięcie tych czterech trójkątów o polach $S/5$, ma także pole $S/5$. Z kolei ośmiokąt, o którym mowa w zadaniu, powstaje z równoległoboku $KLMN$ przez odcięcie czterech małych trójkątów, z których każdy, tak jak KPQ, ma pole $S/120$. Ostatecznie pole tego ośmiokąta równa się $S/5-4(S/120) = S/6$.

84. Liczba o tej własności nie istnieje. Dowód. Przypuśćmy, że k jest taką liczbą. Wówczas $2k$ ma same cyfry parzyste. Niech j będzie ostatnią niezerową cyfrą liczby $2k$. Gdy $j = 2$ lub $j = 8$, mnożymy $2k$ przez 7; gdy $j = 4$ lub $j = 6$, mnożymy $2k$ przez 3. W każdym przypadku otrzymana wielokrotność k jest liczbą, której ostatnia niezerowa cyfra jest parzysta, a przedostatnia — nieparzysta.