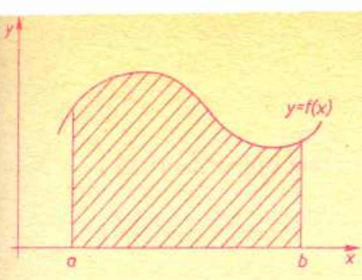
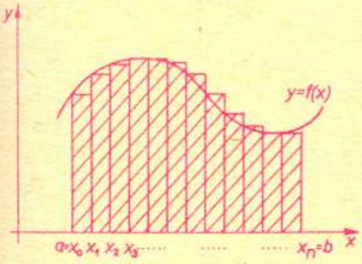
Analiza niestandardowa

Doc. dr Wojciech GUZICKI



Rys. 1



Rys. 2

Prezentację podstawowych pojęć analizy niestandardowej rozpoczniemy od omówienia dwóch przykładów. W pierwszym z nich wyobraźmy sobie, że jadąc samochodem chcemy w pewnym momencie stwierdzić, z jaką jedziemy prędkością (pech chciał, że akurat urwała się linka od naszego dotychczas niezawodnego szybkościomierza i nie wystarczy rzut oka na tablicę rozdzielczą). Każdy z nas oczywiście wie, co można zrobić. Na przykład zobaczyć, ile przejedziemy kilometrów w ciągu najbliższej godziny, albo lepiej — w ciągu najbliższej minuty czy sekundy i korzystając z prostych wzorów wyliczyć wtedy prędkość w kilometrach na godzinę. Zakładając nawet możliwość wykonywania bezbłędnych pomiarów odległości i czasu ta metoda daje jedynie przybliżony wynik. Obliczamy przecież przeciętną prędkość samochodu w badanym okresie, a nie prędkość w jednej interesującej nas chwili. Jest oczywiste, że błąd będzie tym mniejszy, im krótszy będzie przedział czasu, w którym wykonujemy pomiary. Chciałoby się powiedzieć: jeśli rozpatrywany przedział czasu jest nieskończenie krótki, to uzyskany błąd jest nieskończenie mały, można go więc pominąć. Opierając się na tej intuicji twórcy rachunku różniczkowego zdefiniowali pojęcie pochodnej funkcji f w punkcie x_0: biorąc nieskończenie małą wartość h kładziemy $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Jeżeli zatem przebytą samochodem drogę przedstawimy jako funkcję czasu, to prędkość w danej chwili jest pochodną tej funkcji.

W naszym drugim przykładzie będziemy chcieli wyznaczyć pole obszaru przedstawionego na rysunku 1. W tym celu dzielimy odcinek $[a, b]$ na mniejsze odcinki punktami $x_0 = a, \ldots, x_n = b$ i sumujemy pola prostokątów o podstawach $[x_i, x_{i+1}]$ i wysokościach $f(x_i)$ (rysunek 2). Dla uproszczenia przyjmijmy, że punkty x_i dzielą odcinek $[a, b]$ na równe części: $x_{i+1}-x_i = \frac{b-a}{n}$.

Suma pól prostokątów wynosi zatem $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{b-a}{n}$. Tak wyznaczona liczba oczywiście tylko przybliża pole rozważanego obszaru i przybliżenie jest tym lepsze, im mniejsze są odległości między punktami podziału. Znów idealną sytuację otrzymalibyśmy dzieląc odcinek $[a, b]$ na nieskończenie małe odcinki i sumując pole nieskończenie wielu nieskończenie wąskich prostokątów. Tak otrzymaną sumę twórcy rachunku różniczkowego nazwali całką oznaczoną funkcji f w przedziale $[a, b]$.

W momencie powstawania analizy matematycznej zarówno Newton, jak i Leibniz określali jej podstawowe pojęcia używając w jawny sposób liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych. Nie podawali oni przy tym żadnych reguł postępowania z takimi liczbami, opierając się jedynie na swojej intuicji i przekonaniu, że takie ,,idealne" liczby istnieją. Na przykład Leibniz uważał, że każda liczba rzeczywista jest otoczona wieloma liczbami nieskończenie mało różniącymi się od niej, tworzącymi tak zwaną monadę. Ponadto istniały według niego liczby nieskończone dodatnie i ujemne. Wszystkie te liczby miały podlegać tym samym prawom, co liczby rzeczywiste. Liczby nieskończenie małe dały również Leibnizowi motywację do przyjęcia notacji używanej do dziś w rachunku różniczkowym i całkowym. Na przykład pochodna funkcji f w punkcie x_0 została określona jako iloraz $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, przy czym różnica x_1-x_0 była nieskończenie mała. Różnicę x_1-x_0 można nazwać przyrostem zmiennej x, oznaczając przez Δx. Wtedy rozważany iloraz ma postać $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Nieskończenie mały przyrost Δx Leibniz oznaczył przez $\mathrm{d}x$. Odpowiadający mu przyrost funkcji $y = f(x)$ należało oznaczyć przez Δy; w przypadku, gdy był on nieskończenie mały, naturalne było przyjęcie oznaczenia $\mathrm{d}y$. Pochodna jest więc ilorazem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Podobnie było z oznaczeniem całki. Przyjmując $x_{i+1}-x_i = \mathrm{d}x$ i pisząc $f(x)$ zamiast $f(x_i)$ otrzymujemy sumę $\sum_{x=a}^{x=b} f(x)\mathrm{d}x$. Teraz Leibniz na oznaczenie sumy przyjął znak $\int$ będący stylizowaną literą S, otrzymując $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Przez cały XVIII wiek analiza matematyczna rozwijała się w oparciu o intuicje pochodzące z rachunku nieskończonych. Euler poświęcił całą monografię zastosowaniom liczb nieskończonych i nieskończenie małych. Uzyskiwane wyniki, pomimo budzącej wątpliwości metody dowodowej, były na ogół poprawne, chociaż zdarzały się wyjątki — niewłaściwe użycie nieskończenie małych

Przyjmuje się, że w zbiorze $\mathbf{R}^*$ liczb hiperrzeczywistych są określone dwa działania — dodawanie i mnożenie (zapisywane w tradycyjny sposób) oraz wyróżnione dwa elementy — 0 i 1.
Mają one następujące własności:

— działania są łączne

$$a+(b+c) = (a+b)+c,$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

— działania są przemienne

$$a+b = b+a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

— mnożenie jest rozdzielne względem dodawania

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

— 0 i 1 są elementami neutralnymi

$$a+0 = a, \qquad a \cdot 1 = a,$$

— wykonalne są działania odwrotne, tzn. dla każdego $a \in \mathbf{R}^*$ istnieje w $\mathbf{R}^*$ element oznaczany $-a$ taki, że $a+(-a) = 0$ oraz jeśli $a \neq 0$, to istnieje w $\mathbf{R}^*$ element oznaczany $\frac{1}{a}$ taki, że $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(Powyższe aksjomaty mówią, że zbiór $\mathbf{R}^*$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia oraz elementami 0 i 1 jest ciałem.)

Następnie zakłada się, że w zbiorze $\mathbf{R}^*$ jest określona relacja mniejszości $<$, tzn. relacja zachodząca między elementami $\mathbf{R}^*$ i spełniająca aksjomaty:

— jeśli $a < b$ oraz $b < c$, to $a < c$,

— dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}^*$ spośród zdań $a < b$, $a = b$, $b < a$ dokładnie jedno jest prawdziwe.

Związek działań z relacją mniejszości podają aksjomaty:

— jeśli $a < b$, to dla dowolnego $c \in \mathbf{R}^*$ mamy również $a+c < b+c$,

— jeśli $a < b$ oraz $c > 0$, to $a \cdot c < b \cdot c$.

(Wszystkie dotychczasowe aksjomaty mówią, że zbiór $\mathbf{R}^*$ wraz z działaniami, relacją mniejszości i elementami 0 i 1 jest ciałem uporządkowanym.)

Następnie przyjmuje się, że zbiór $\mathbf{R}$ jest podzbiorem zbioru $\mathbf{R}^*$ takim, że

— 0 i 1 są elementami $\mathbf{R}$,

— jeśli $a, b \in \mathbf{R}$, to $a+b \in \mathbf{R}$ oraz $a \cdot b \in \mathbf{R}$,

— jeśli $a \in \mathbf{R}$, to $-a \in \mathbf{R}$ oraz $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ $(a \neq 0)$.

(Zbiór $\mathbf{R}$ jest zatem podciałem ciała $\mathbf{R}^*$ — zauważmy, że działania i relacja mniejszości spełniają w $\mathbf{R}$ wszystkie aksjomaty ciała uporządkowanego.)

Wreszcie przyjmuje się aksjomat ciągłości dla zbioru $\mathbf{R}$:

— jeśli zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$ jest niepusty i ograniczony z góry, to w zbiorze liczb rzeczywistych ograniczających z góry zbiór A istnieje liczba najmniejsza, zwana kresem górnym zbioru A.

dawało wyniki błędne. Jednakże już w pierwszej połowie XVIII wieku metoda ta spotkała się z krytyką. Jednym z pierwszych krytyków był wybitny filozof, biskup Berkeley, przedstawiający w jednym ze swoich traktatów pełny obraz trudności, z jakimi borykała się powstająca analiza matematyczna. Uściślenie podstaw analizy było więc jednym z ważniejszych zadań stojących przed matematyką.

Zasadniczego postępu dokonał w początkach XIX wieku Cauchy, sprowadzając całą analizę matematyczną do pojęcia granicy, samego tego pojęcia nie definiując jednak w sposób wystarczająco ścisły. Niektóre podawane przez niego sformułowania definicji granicy odwoływały się wręcz do pojęcia nieskończenie małej. Zaznaczył się jednak zasadniczy kierunek rozwoju podstaw analizy: zamiast uściślić pojęcie wielkości nieskończonych starano się wyeliminować je, zastępując innymi, dobrze określonymi pojęciami. Ostatecznego kroku dokonał w końcu XIX wieku Weierstrass, wprowadzając powszechnie dziś przyjmowany formalizm „epsilonowodeltowy". Koniec XIX wieku przyniósł również precyzyjne określenie liczby rzeczywistej. Liczby nieskończone zniknęły z analizy matematycznej.

Ponowne pojawienie się liczb nieskończonych i nieskończenie małych było możliwe dzięki rozwojowi logiki matematycznej. Około 1960 roku wybitny amerykański logik Abraham Robinson stworzył podstawy tak zwanej analizy niestandardowej, będącej ścisłym ujęciem analizy matematycznej używającej liczb nieskończonych, zgodnie z ideami Leibniza. Analizę niestandardową można sformułować aksjomatycznie, podając własności, jakie powinny przysługiwać liczbom rzeczywistym łącznie z nowymi obiektami — liczbami nieskończenie małymi i nieskończonymi. Zasługą Robinsona było przede wszystkim wykazanie, że istnieją obiekty spełniające te aksjomaty, podobnie jak np. konstrukcja Dedekinda liczb rzeczywistych pokazuje, że istnieją obiekty mające wszystkie własności, których wymagamy od liczb rzeczywistych. Obecnie omówimy aksjomaty analizy niestandardowej, nie zajmując się samą konstrukcją liczb nieskończonych.

Zasadniczym pojęciem analizy niestandardowej są tzw. liczby hiperrzeczywiste, o których zakłada się, że zawierają cały zbiór liczb rzeczywistych oraz mają te same co liczby rzeczywiste własności algebraiczne. Można zatem na liczbach hiperrzeczywistych wykonywać działania algebraiczne — dodawania, mnożenia, odejmowania, dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez zero). Działania te są rozszerzeniami zwykłych działań algebraicznych. Liczby hiperrzeczywiste są również uporządkowane i związek relacji mniejszości z działaniami algebraicznymi jest taki sam, jak dla liczb rzeczywistych. Dokładne sformułowanie aksjomatów podających algebraiczne własności działań i porządku znajdzie Czytelnik obok.

W dalszym ciągu zbiór liczb rzeczywistych będziemy oznaczać przez $\mathbf{R}$, a zbiór liczb hiperrzeczywistych przez $\mathbf{R}^*$. Mamy zatem inkluzję $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^*$. Działania w $\mathbf{R}^*$ oraz relację porządku będziemy oznaczać tak samo, jak w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Przyjmuje się ponadto tzw. aksjomat ciągłości, mówiący, że każdy ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma kresy będące liczbami rzeczywistymi. Ważnym aksjomatem jest aksjomat orzekający, że istnieją liczby hiperrzeczywiste nie będące liczbami rzeczywistymi, czyli że $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^*$.

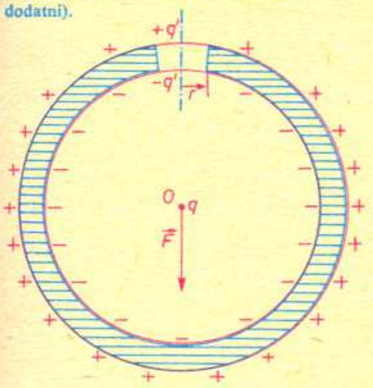
Teraz liczbę hiperrzeczywistą x nazywa się liczbą nieskończoną, jeżeli jest większa od wszystkich liczb rzeczywistych: $\bigwedge_{r \in \mathbf{R}} x > r$. Podobnie x jest liczbą nieskończoną ujemną, jeśli jest mniejsza od wszystkich liczb rzeczywistych. Pozostałe liczby hiperrzeczywiste nazywamy liczbami skończonymi. Zatem liczba x jest skończona, jeżeli istnieje liczba rzeczywista r taka, że $-r < x < r$, czyli $|x| < r$. Wreszcie liczbę hiperrzeczywistą x nazwiemy liczbą nieskończenie małą, jeżeli jest mniejsza co do wartości bezwzględnej od wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych: $\bigwedge_{r \in \mathbf{R}} r > 0 \Rightarrow |x| < r$. Zauważamy bez trudności, że 0 jest jedyną nieskończenie małą liczbą rzeczywistą.

Nietrudno teraz dowieść, że jeśli liczba hiperrzeczywista x jest skończona, to liczba rzeczywista $r = sup\ \{s \in \mathbf{R}: s < x\}$ jest nieskończenie bliska liczbie x, tzn. liczba $|x-r|$ jest nieskończenie mała. Piszemy wtedy $x \approx r$, a liczbę r nazywamy standardową częścią liczby x i oznaczamy $st(x)$.

Pokażemy teraz przy założeniu, że nie wszystkie liczby hiperrzeczywiste są rzeczywiste, że istnieją liczby nieskończone i nieskończenie małe. Weźmy liczbę hiperrzeczywistą x nie będącą liczbą rzeczywistą. Jeżeli liczba $|x|$ jest nieskończona, to liczba $\frac{1}{|x|}$ jest nieskończenie mała. Jeżeli zaś liczba x jest skończona, to rozważamy jej część standardową r — różnica $|r-|x||$ jest nieskończenie mała, a jej odwrotność nieskończona.

Następny aksjomat podaje ważną własność funkcji rzeczywistych. Mówi on mianowicie, że funkcje rzeczywiste mogą również być określone dla argumentów hiperrzeczywistych nie będących liczbami rzeczywistymi. Dokładniej, jeśli funkcja f o wartościach rzeczywistych jest

Rozwiązanie zadania F 156. Rozważmy najpierw powłokę bez otworu. Dzięki obecności ładunku q w jej środku nośniki ładunku rozmieszczą się na powierzchni sfery tak, jak to pokazano na rysunku (rysunek wykonano przy założeniu, że ładunek q jest dodatni).



By we wnętrzu metalu natężenie pola było równe zeru i by jednocześnie była spełniona zasada zachowania ładunku, wartości bezwzględne ładunków indukowanych na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni sfery muszą być równe wartości bezwzględnej ładunku q. Natężenie pola elektrostatycznego wytworzonego przez ładunki indukowane na powłoce jest w jej środku równe zeru, co wynika z symetrii układu. Na mocy zasady superpozycji pole to daje się jednocześnie przedstawić: $E = E_1 + E_2 = 0$, gdzie E_1 — pole pochodzące od powłoki z wyciętym myślowo otworem, E_2 — pole od wyciętej części. Stąd: $E_1 = -E_2$. Po wycięciu otworu przemieszczenie ładunków w pozostałej części jest nieznaczne dla $\Delta \ll r$ i przy oszacowaniu można zapisać: $E_1' \approx E_1 = -E_2$, gdzie E_1' — pole powłoki z rzeczywistym otworem. Tak więc obliczanie pola powłoki z wyciętym otworem można zastąpić przez obliczanie pola wyciętej części. W pierwszym przybliżeniu pole to jest polem dipola o momencie dipolowym $q'\Delta$, gdzie $q' = q\pi r^2/4\pi R^2 = qr^2/4R^2$. Pole takiego dipola w środku sfery jest równe: $E = \mathrm{k}q\Delta r^2/2R^5$. Natężenie pola sfery z wyciętym otworem różni się jedynie zwrotem od natężenia pola wyciętej części. Zatem na ładunek q działa siła: $F \sim \mathrm{k}q^2\Delta r^2/R^5$. Dokładniejsze obliczenie działającej siły nie jest możliwe, gdyż nie wiemy, jak istotny jest wpływ przemieszczeń ładunku po wycięciu otworu — mamy jedynie podstawy, by sądzić, że jest on niewielki.

określona w pewnym zbiorze $D \subseteq \mathbf{R}$, to przyporządkowujemy jej pewną funkcję f^* określoną w pewnym podzbiorze $\mathbf{R}^*$, o wartościach hiperrzeczywistych taką, że dla $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = f^*(x)$. Funkcję f^* nazywamy naturalnym rozszerzeniem funkcji f. Ogólniej, zamiast funkcji jednej zmiennej możemy rozpatrywać funkcje wielu zmiennych, tzn. funkcje określone w pewnym podzbiorze przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Wreszcie, każdemu zbiorowi $A \subseteq \mathbf{R}$ przyporządkowujemy jego naturalne rozszerzenie $A^* \subseteq \mathbf{R}^*$ tak, aby $A \subseteq A^*$ i analogicznie postępujemy w przypadku podzbiorów przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Należy przy tym zwrócić uwagę, że ten aksjomat nie mówi nam znów nic o tym, jak wyglądają naturalne rozszerzenia funkcji i zbiorów. W szczególności nie wyjaśnia, czy w ogóle funkcja f^* jest określona dla jakichkolwiek argumentów spoza dziedziny funkcji f, ani czy np. dziedzina funkcji f^* jest naturalnym rozszerzeniem dziedziny f. Te sprawy będą regulowane przez następny aksjomat. W tej chwili przyjmiemy tylko, że działania algebraiczne w $\mathbf{R}^*$ są naturalnymi rozszerzeniami działań w $\mathbf{R}$ oraz relacja mniejszości w $\mathbf{R}^*$ jest naturalnym rozszerzeniem relacji mniejszości w $\mathbf{R}$ (tzn. zbiór $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathbf{R}^* \wedge y \in \mathbf{R}^* \wedge x < y\}$ jest naturalnym rozszerzeniem zbioru $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x < y\}$). Podobnie jak w przypadku działań algebraicznych, które zarówno w $\mathbf{R}$, jak i $\mathbf{R}^*$ oznaczamy tak samo, naturalne rozszerzenie dowolnej funkcji f często oznacza się tym samym symbolem.

Przed sformułowaniem ostatniego aksjomatu pokażemy, że własności zbioru liczb hiperrzeczywistych istotnie różnią się od własności $\mathbf{R}$. Zauważmy najpierw, że zbiór liczb naturalnych $\mathbf{N}$ jest w zbiorze liczb rzeczywistych nieograniczony od góry. W przeciwnym bowiem razie wzięlibyśmy liczbę $t = sup\mathbf{N}$ i z łatwością zauważylibyśmy, że liczba $t-1$ jest również ograniczeniem górnym zbioru $\mathbf{N}$, wbrew definicji kresu górnego. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba naturalna n taka, że $x < n$ (jest to tzw. aksjomat Archimedesa). Tej własności oczywiście zbiór $\mathbf{R}^*$ nie ma — istnieją bowiem w nim liczby nieskończone, zatem większe od każdej liczby naturalnej. W szczególności wynika stąd, że aksjomat ciągłości nie jest prawdziwy dla liczb hiperrzeczywistych. Okazuje się jednak, że można wskazać szeroką klasę własności wspólnych dla liczb rzeczywistych i hiperrzeczywistych.

Ostatni aksjomat, nazywany zasadą Leibniza, stwierdza, że funkcje rzeczywiste i zbiory liczb rzeczywistych (ogólniej — podzbiory $\mathbf{R}^n$) mają w zbiorze liczb rzeczywistych te same własności, co ich naturalne rozszerzenia w zbiorze liczb hiperrzeczywistych. Ograniczamy się jednak do takich własności, które można sformułować używając wyrażeń postaci „dla dowolnej liczby x" czy „istnieje liczba x", nie używając natomiast kwantyfikatorów wiążących dowolne zbiory czy funkcje. W ten sposób na przykład tzw. zbiór liczb hipernaturalnych $\mathbf{N}^*$ (tzn. naturalne rozszerzenie zbioru $\mathbf{N}$ liczb naturalnych) ma w zbiorze $\mathbf{R}^*$ własność analogiczną do aksjomatu Archimedesa: dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}^*$ istnieje liczba $n \in \mathbf{N}^*$ taka, że $x < n$. Podobnie zauważamy, że jeśli funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej (czyli dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ istnieje liczba $y \in \mathbf{R}$ taka, że $f(x) = y$), to jej naturalne rozszerzenie f^* jest określone na całym zbiorze $\mathbf{R}^*$ (bo dla każdego $x \in \mathbf{R}^*$ istnieje $y \in \mathbf{R}^*$ taki, że $f^*(x) = y$). W taki sam sposób można pokazać, że dziedzina funkcji f^* jest naturalnym rozszerzeniem dziedziny funkcji f.

Nie można natomiast wnioskować, że liczby hiperrzeczywiste spełniają aksjomat ciągłości, bo w jego sformułowaniu występuje niedozwolony kwantyfikator: dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbf{R}$, jeśli A jest ograniczony z góry, to A ma kres górny.

Pokażemy teraz, jak przy użyciu analizy niestandardowej można określić podstawowe pojęcia analizy matematycznej. Na początek zajmiemy się pojęciem ciągłości funkcji. W intuicyjnym sensie funkcja jest ciągła, jeżeli „w ciągły sposób", tzn. bez skoków przechodzi od jednej wartości do drugiej, czyli że niewielkim zmianom argumentu mają odpowiadać niewielkie zmiany wartości. Oczywista jest zatem definicja: funkcja rzeczywista f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli dla dowolnego punktu x takiego, że $x \approx x_0$ mamy $f^*(x) \approx f(x_0)$. Wykażemy, że ta definicja jest równoważna powszechnie przyjmowanej definicji „epsilonowodeltowej":

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Załóżmy więc, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 w sensie tradycyjnym. Weźmy dowolną liczbę hiperrzeczywistą x taką, że $x \approx x_0$. Mamy pokazać, że $f^*(x) \approx f(x_0)$, czyli że $f^*(x) - f^*(x_0)$ jest liczbą nieskończenie małą. Mamy więc pokazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $|f^*(x) - f^*(x_0)| < \varepsilon$. Dla tej liczby ε dobieramy liczbę rzeczywistą $\delta > 0$ taką, by $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Z zasady Leibniza wynika, że wówczas $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}^*} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$.

Ponieważ jednak dla wybranej przez nas liczby x mamy $x \approx x_0$, więc tym bardziej $|x-x_0| < \delta$. Stąd $|f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$. Na odwrót, załóżmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 w sensie niestandardowym. Weźmy liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Mamy znaleźć liczbę rzeczywistą $\delta > 0$ taką, że

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Weźmy dowolną liczbę $\delta \in \mathbf{R}^*$, $\delta > 0$ taką, że $\delta \approx 0$. Wtedy dla dowolnej liczby hiperrzeczywistej x takiej, że $|x-x_0| < \delta$ mamy $x \approx x_0$, a stąd $f^*(x) \approx f^*(x_0)$. Zatem $|f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$.
Wynika stąd, że $\bigvee\limits_{\delta\in\mathbf{R}^*,\,\delta>0}\ \bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f^*(x)-f^*(x_0)| < \varepsilon$.

Z zasady Leibniza otrzymujemy tezę: $\bigvee\limits_{\delta\in\mathbf{R},\,\delta>0}\ \bigwedge\limits_{x\in\mathbf{R}} |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

W następnej kolejności wprowadzimy pojęcie pochodnej opierając się na intuicjach omówionych we wstępie. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną równą y_0, jeżeli dla każdej różnej od zera nieskończenie małej liczby h iloraz różnicowy $\dfrac{f^*(x_0+h)-f^*(x_0)}{h}$ jest nieskończenie bliski y_0. Zatem $f'(x_0) = st\left(\dfrac{f^*(x_0+\Delta x)-f^*(x_0)}{\Delta x}\right)$ dla $\Delta x \approx 0$, $\Delta x \neq 0$.

Wreszcie zajmiemy się pojęciem całki oznaczonej. Przypuśćmy, że w przedziale $[a, b]$ mamy określoną funkcję ciągłą f. Obieramy nieskończoną liczbę hipernaturalną ν i kładziemy $\delta = \dfrac{b-a}{\nu}$.
Następnie dzielimy przedział $[a, b]^*$ (zauważamy, że $[a, b]^* = \{x \in \mathbf{R}^* : a \leqslant x \leqslant b\}$) na ν równych części o długości δ punktami $t_0 = a$, $t_1 = a+\delta$, $t_2 = a+h\delta, \ldots, t_\nu = b$. Zauważamy, że oczywiście $\delta \approx 0$. Zgodnie z intuicją podaną we wstępie położymy teraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = st\Big(\sum_{i=0}^{\nu-1} f^*(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)\Big).$$

Na zakończenie należy stwierdzić, że analiza niestandardowa nie jest wyłącznie motywowaną filozoficznymi względami elegancką formalizacją oryginalnych idei Leibniza, ale stanowi silny aparat dowodowy. Z zasady Leibniza wynika, że dowolna własność liczb hiperrzeczywistych, dająca się sformułować w sposób dopuszczony przez tę zasadę, przysługuje również liczbom rzeczywistym. Dowód takiej własności stosujący metody niestandardowe jest zatem dowodem jej prawdziwości. Obecnie znamy już szereg twierdzeń udowodnionych po raz pierwszy właśnie przy użyciu analizy niestandardowej.

Zadania

Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 371. Wykazać, że jedynym rozwiązaniem całkowitym równania $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ jest $x = y = z = 0$.
Rozwiązanie na str. 16

M 372. Na dwóch półprostych o początku O wybieramy punkty A, B tak, że $OA = OB+m$, gdzie m jest ustaloną liczbą dodatnią. Wykazać, że środki odcinków AB spełniających ten warunek leżą na pewnej półprostej.
Rozwiązanie na str. 10

M 373. Co jest większe: $\cos(\sin x)$ czy $\sin(\cos x)$?
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 156. Oszacować siłę działającą na ładunek q umieszczony w środku obojętnej elektrycznie, metalowej powłoki sferycznej o promieniu R i grubości ścianek Δ. W powłoce znajduje się niewielki otworek o promieniu r. Należy przyjąć: $r \ll R$ oraz $\Delta \ll r$.
Zadanie nadesłał p. Włodzimierz Zielicz.
Rozwiązanie na str. 3

F 157. Próżniowy kondensator płaski zbudowany jest z dwóch cienkich płyt o powierzchni s, odległych o d ($s \gg d^2$). Jak zmieni się pojemność kondensatora, gdy umieścimy go w metalowej puszce, której ścianki znajdują się w odległości $3d$ (patrz rysunek)?
Rozwiązanie na str. 12