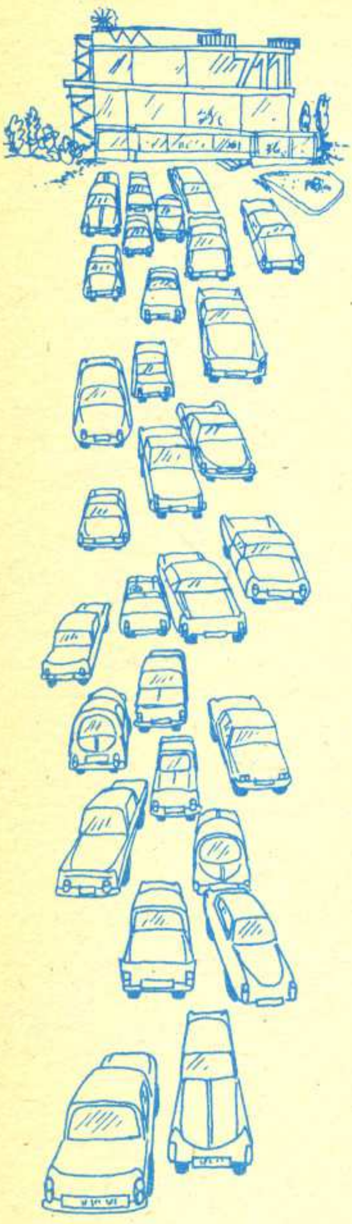
Rozstrzygnięcie konkursu 7.11



Przypomnijmy: suma cen czterech towarów wynosi 7,11; tyle też wynosi iloczyn tych cen. Zadanie konkursowe polegało na znalezieniu cen poszczególnych towarów.

Okazuje się, że warunki zadania wyznaczają ceny jednoznacznie (z dokładnością do kolejności): 3,16 – 1,25 – 1,50 – 1,20.

Spośród nadesłanych rozwiązań tylko dwanaście było dobrych (w których znaleziono ceny i wykazano, że innego układu cen być nie może).

Metody uzyskania rozwiązania były (mówimy dalej już tylko o dobrych rozwiązaniach) bardzo różne. Ich cechą wspólną było rozpoczęcie od spostrzeżenia, że chodzi o rozwiązanie w liczbach naturalnych układu równań (ceny w centach, a nie w dolarach)

$$\begin{cases} a+b+c+d = 711 \\ a\cdot b\cdot c\cdot d = 711\cdot 10^6 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5^6\cdot 79, \end{cases}$$

a zatem pogrupowanie piętnastu liczb pierwszych w cztery grupy tak, by suma iloczynów liczb z poszczególnych grup wyniosła 711.

Dalej rozwiązania idą już różnymi drogami. Często jednak powtarza się oszacowanie cen (w centach) z góry za pomocą spostrzeżenia, że średnia geometryczna liczb dodatnich nie jest większa od ich średniej arytmetycznej. Również częste jest rozważanie rozmieszczenia piątek. Cena (w centach) podzielna przez 79 (niech będzie to a) nie dzieli się przez 5, gdyż wówczas mielibyśmy

$$b+c+d = 316 < 3\cdot\sqrt[3]{2^6\cdot 3^2\cdot 5^5} = 3\cdot\sqrt[3]{b\cdot c\cdot d},$$

a więc sprzeczność. Wszystkie piątki są więc rozmieszczone w b, c i d. Żadna z tych liczb nie dzieli się przez $5^4 = 625$, bo musiałaby być równa 625, co daje sprzeczność w podobny sposób. Zatem pozostają (z dokładnością do kolejności) trzy możliwości.

1. Każda z liczb b, c, d dzieli się przez 5^2. Tak być nie może, bo każda z liczb $b+c+d = 711-a$ nie dzieli się przez 25 (mamy bowiem $711-a = 79(9-k)$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, 8$).

2. Jedna z liczb (powiedzmy b) nie dzieli się przez 5. Wówczas c i d dzielą się przez 125 i są mniejsze od 375 (możliwość, że c bądź d jest 375 lub 500 wykluczamy jak poprzednio). Mamy więc $c+d = 125\cdot l$, gdzie $l = 2, 3, 4$. Ale to nie prowadzi do rozwiązania, gdyż żaden z trzech układów równań

$$\begin{cases} a+b = 711-125\cdot l \\ a\cdot b = 2^{6+2-l}\cdot 3^2\cdot 79 \end{cases} \qquad l = 2, 3, 4$$

nie ma rozwiązań naturalnych.

3. $b = x\cdot 125$, $c = y\cdot 25$, $d = z\cdot 5$, gdzie x, y, z nie dzielą się przez 5. Wówczas $b+c+d = 711-a$ dzieli się przez 5, skąd mamy $a = 316$. Pozostaje do rozwiązania układ

$$\begin{cases} b+c+d = 395 \\ b\cdot c\cdot d = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^6, \end{cases}$$

czyli po podstawieniu

$$\begin{cases} 25x+5y+z = 79 \\ x\cdot y\cdot z = 2^4\cdot 3^2. \end{cases}$$

Zatem $x \leqslant 2$. Dla $x = 2$ mamy jednak

$$\begin{cases} 5y+z = 29 \\ y\cdot z = 2^3\cdot 3^2 = 72, \end{cases}$$

co nie ma rozwiązań naturalnych. Pozostaje więc $x = 1$, $y = 6$, $z = 24$.

Przytoczone rozwiązanie nie pokrywa się z żadnym spośród otrzymanych. Nie umieliśmy się jednak zdecydować, który z Czytelników rozwiązał konkurs najlepiej. Wszystkie przyznane nagrody traktujemy wobec tego równorzędnie.

Odrębnie potraktowaliśmy tylko pracę pana Ksawerego Stojdy, który opracował algorytm poszukiwania rozwiązań, zakodował go w języku Fortran i przekazał dalszą pracę komputerowi CDC CYBER 72 pod kontrolą systemu SCOPE 3.4.4 w Świerku (miał do niego dostęp jako student drugiego roku fizyki UW). Nie nagrodziliśmy ani p. Stojdy, ani CDC, tylko zwróciliśmy się o opisanie całej sprawy w nr. 12/1984, który będzie poświęcony algorytmom. Zamiast nagrody będzie więc publikacja i honorarium.

Redakcja

Nagrody książkowe otrzymali:

Anna Gluza, Toruń,
Ewa Janiszewska, Kraków,
Jerzy Janowicz, Bolesławiec,
Adam Lipowski, Zielona Góra,
Michał Marczak, Radom,
Marek Prauza, Poraj,
Józef Siwy, Łaziska Górne,
Piotr Tomassi, Warszawa,
Jarosław Wróblewski, Wrocław,
Krzysztof Zygan, Lublin

Nie otrzymał nagrody Piotr Figurny, gdyż nie podał adresu.