Małe zbiory na prostej

Dr Andrzej PELC

Jakie zbiory liczb rzeczywistych czy też punktów na prostej można nazwać małymi? Co do niektórych na pewno nie ma wątpliwości. Każdy się chyba zgodzi, że zbiór pusty i zbiory jednoelementowe są małe. A inne zbiory skończone? Choćby miały milion elementów, to w porównaniu z mrowiem wszystkich liczb rzeczywistych są jednak małe. Nie na darmo matematycy mówią „prawie wszystkie wyrazy ciągu" zamiast „wszystkie poza skończoną ilością".

Zapytajmy z kolei, czy są jakieś małe zbiory nieskończone. O sugestywne przykłady i tu nietrudno. Przyjrzyjmy się liczbom całkowitym na osi liczbowej. Tak rzadko się pojawiają, że prawie ich nie widać wśród reszty. No tak, ale to tylko przykład, a czy można podać cechę wyróżniającą małe zbiory nieskończone spośród innych? Najprostsze jest kryterium odwołujące się do liczby elementów. Zbiór mały to zbiór równoliczny ze zbiorem liczb całkowitych (którego „małość" już zaakceptowaliśmy), a więc przeliczalny.

Zbiory A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje różnowartościowa funkcja f działająca z A na B.

Tu jednak czekają pewne niespodzianki: zbiór wszystkich liczb wymiernych też jest przeliczalny, a intuicyjnie nie wydaje się taki mały, wszak liczby wymierne są gęsto upakowane wśród liczb rzeczywistych. Z praktyki matematycznej wynika jednak, że zbiory przeliczalne na prostej należy traktować jako małe, wiele bowiem istotnych rozważań można prowadzić dopuszczając zaburzenia badanej własności właśnie na zbiorach przeliczalnych. Umówmy się więc, że uważamy rodzinę przeliczalnych podzbiorów prostej za wzorcowy przykład rodziny zbiorów małych.

Zastosowane powyżej kryterium równoliczności nie jest jednak właściwe dla badania zbiorów małych. Okazuje się bowiem, że są zbiory równoliczne z całą prostą (która musi być oczywiście traktowana jako zbiór duży) i mające pewne własności strukturalne skłaniające do zaklasyfikowania ich jako zbiorów małych. Tymi własnościami będziemy się zajmować w niniejszym artykule, przedtem jednak podamy ogólne cechy rodzin zbiorów małych.

Jak już mówiliśmy, zbiory jednoelementowe są małe, cała prosta nie jest zbiorem małym, z pewnością podzbiór zbioru małego jest mały. Wydaje się również zgodne z intuicją twierdzić, że suma niewielu zbiorów małych jest mała. Że zaś zbiory przeliczalne uznaliśmy za niewielkie, przyjmijmy, iż suma przeliczalnej rodziny zbiorów małych jest zbiorem małym. Powyższe rozważania doprowadzają do pojęcia σ — ideału jako naturalnego schematu konstruowania rodzin zbiorów małych.

σ — ideałem na prostej nazwiemy rodzinę I zbiorów liczb rzeczywistych o następujących własnościach:

1. $\{x\} \in I$ dla każdej liczby rzeczywistej x;
2. $\mathbf{R} \notin I$ ($\mathbf{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych);
3. Jeśli $A \subset B$ i $B \in I$, to $A \in I$;
4. Jeśli $\{A_n : n \in \mathrm{N}\}$ jest rodziną zbiorów należących do I, to $\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n \in I$.

Piszemy $\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n$ zamiast $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$.

Rodzina podzbiorów skończonych lub przeliczalnych zbioru liczb rzeczywistych stanowi, jak się łatwo przekonać, σ — ideał (bowiem $\mathbf{R}$ jest zbiorem nieprzeliczalnym). Jest to ponadto σ — ideał najmniejszy, tzn. zawarty w każdym innym. Naszym zaś celem będzie szukanie σ — ideałów obszerniejszych, do których należą również zbiory nieprzeliczalne. Okazuje się, że takich rodzin pojawia się wiele przy okazji różnych badań matematycznych.

Na początek rozważmy rodzinę zbiorów, które można pokryć przeliczalną ilością odcinków o dowolnie małej sumie długości. Takie zbiory nazywamy zbiorami miary zero. Dokładniej:

Zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$ jest zbiorem miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją odcinki I_n: $n \in \mathrm{N}$ takie, że $A \subset \bigcup_{n\in\mathrm{N}} I_n$ i $\sum_{n\in\mathrm{N}} |I_n| \leq \varepsilon$ ($|I|$ oznacza długość odcinka I).

Zbiory miary zero można z pewnością traktować jako małe, są bowiem podzbiorami sum krótkich odcinków. Czytelnik może sprawdzić bez trudu, że zbiory te tworzą σ — ideał. Nieco trudniej jest wskazać zbiór miary zero równoliczny z całą prostą. Typowym przykładem jest sławny zbiór Cantora. Tak więc zbiory miary zero to pierwszy rodzaj zbiorów, które są małe ze względu na sposób ułożenia elementów, a nie na ich ilość.

Zbiór Cantora konstruuje się następująco: odcinek $[0, 1]$ dzielimy na trzy równe odcinki i wyrzucamy środkowy odcinek otwarty. Każdy pozostały odcinek dzielimy na trzy równe odcinki i wyrzucamy środkowe odcinki otwarte itd. Konstrukcję ciągniemy „w nieskończoność". To co zostanie, to właśnie zbiór Cantora.

Następna rodzina zbiorów małych jest zdefiniowana łudząco podobnie, okazuje się jednak mieć zupełnie inne własności.

Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazwiemy zbiorem silnie miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(a_n : n \in \mathrm{N})$ liczb dodatnich istnieje ciąg odcinków $(I_n : n \in \mathrm{N})$ taki, że $|I_n| < a_n$ i $A \subset \bigcup_{n\in\mathrm{N}} I_n$.

Tak więc zbiór silnie miary zero to zbiór, który można pokryć sumą odcinków o dowolnie małych długościach (w odróżnieniu od zbioru miary zero, który można pokryć sumą odcinków o dowolnie małej sumie długości). Ta niewielka z pozoru różnica w określeniu ma bardzo poważny wpływ na różnice własności omawianych rodzin zbiorów.

Zauważmy przede wszystkim, że zbiory silnie miary zero tworzą σ — ideał. Jest on zawarty w σ — ideale zbiorów miary zero, innymi słowy każdy zbiór silnie miary zero jest zbiorem miary zero. Można ponadto wykazać, że na przykład wspomniany powyżej zbiór Cantora nie jest zbiorem silnie miary zero, czyli σ — ideał zbiorów silnie miary zero jest ostro zawarty w σ — ideale zbiorów miary zero. Problem, czy istnieją nieprzeliczalne zbiory silnie miary zero, pozostawał przez długi czas otwarty i jego pełne rozwiązanie podano dopiero w roku 1976. Okazuje się, że zdanie „Każdy zbiór silnie miary zero jest skończony lub przeliczalny", zwane hipotezą Borela, jest niezależne od aksjomatyki teorii mnogości, czyli nie można go ani udowodnić, ani obalić. Tak prosto sformułowany problem wnika więc głęboko w podstawy matematyki.

Zarówno zbiory miary zero, jak i silnie miary zero są małe, bo są zawarte w sumach odcinków w pewnym sensie krótkich. Innym sposobem otrzymywania zbiorów małych jest żądanie, by nie zawierały „dużych kawałków". Pierwszą próbą mógłby być postulat, by zbiór mały nie zawierał odcinka. Takie zbiory nazywamy brzegowymi. Rodzina zbiorów brzegowych nie jest jednak dobrą kandydatką na rodzinę zbiorów małych, nie stanowi ona bowiem σ — ideału: zarówno zbiór liczb wymiernych, jak i niewymiernych są brzegowe, a ich suma to cała prosta. Trzeba więc spośród zbiorów brzegowych wyeliminować przynajmniej te, które są uzupełnieniami zbiorów brzegowych. Można to osiągnąć ograniczając się na przykład do zbiorów domkniętych brzegowych i te potraktować jako małe. Nie tworzą wprawdzie σ — ideału, ale łatwo je doń uzupełnić rozważając wszystkie podzbiory sum przeliczalnych rodzin zbiorów domkniętych brzegowych.

Zbiór domknięty to taki, który wraz z każdym ciągiem elementów zawiera jego granice.

Przyjmiemy następującą definicję:

Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywa się cienki, jeśli istnieje taki ciąg $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ zbiorów domkniętych brzegowych, że $A \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$.

Warto chyba w tym miejscu podać pewną własność zbiorów cienkich, bardzo sugestywnie dowodzącą ich „małości". Z każdym zbiorem $A \subset \mathbf{R}$ wiążemy następującą grę dwuosobową G_A: gracze na przemian wybierają odcinki domknięte w ten sposób, by odcinek wybrany w danym ruchu zawierał się w odcinku wybranym w poprzednim ruchu partnera. Gra toczy się w „nieskończoność". Jeśli przecięcie wszystkich zagranych odcinków ma wspólne punkty ze zbiorem A, wówczas wygrywa gracz pierwszy. W przeciwnym razie wygrywa drugi. Okazuje się, że gracz drugi ma strategię wygrywającą w grze G_A (czyli plan gry pozwalającej mu wyminąć zbiór A bez względu na przemyślność przeciwnika) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest cienki. Małe to muszą być zbiory, które można tak wyminąć, prawda?

Twierdzenie Baire'a orzeka, że zbiór $\mathbf{R}$ nie jest cienki.

To, że zbiory cienkie tworzą σ — ideał, wynika natychmiast z ich definicji i twierdzenia Baire'a. Tak więc istotnie można je uważać za zbiory małe. Porównajmy tak otrzymaną rodzinę z poprzednio rozważanymi σ — ideałami. Czeka nas tu, niestety, przykra niespodzianka. Okazuje się, że cały zbiór liczb rzeczywistych można podzielić na dwa zbiory, z których jeden jest cienki, a drugi miary zero. Oba te pojęcia małości zbioru, choć jednakowo chyba intuicyjne, są więc ze sobą sprzeczne.

Zależność między zbiorami cienkimi a zbiorami silnie miary zero jest bardziej skomplikowana. Bez trudu można podać przykład zbioru cienkiego, który nie jest silnie miary zero (znów zbiór Cantora), natomiast zdanie „każdy zbiór silnie miary zero jest cienki" okazuje się niezależne od aksjomatyki teorii mnogości.

Inny aspekt związku między tymi σ — ideałami pokazuje następujące twierdzenie:

Zbiór jest silnie miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór cienki zawiera się w pewnym przesunięciu jego uzupełnienia.

Przesunięciem zbioru $A \subset \mathbf{R}$ o liczbę $x \in \mathbf{R}$ nazywamy zbiór $\{x+a : a \in A\}$.

Twierdzenie to dostarcza dodatkowej informacji o tym, jak małe są zbiory silnie miary zero lub, mówiąc inaczej, jak wielkie są ich uzupełnienia: tak wielkie, że każdy zbiór cienki można w nie „wsunąć".

Jak to często bywa w matematyce, powyższe twierdzenie stało się inspiracją nowego pojęcia. Powstał mianowicie pomysł badania zbiorów, które tak mają się do zbiorów miary zero, jak zbiory silnie miary zero do zbiorów cienkich.

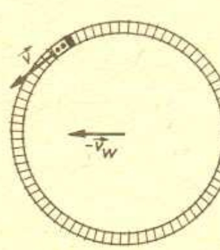
Zbiorami silnie cienkimi przyjęto nazywać takie zbiory A, że każdy zbiór miary zero zawiera się w pewnym przesunięciu uzupełnienia zbioru A.

Łatwo sprawdzić, że każdy zbiór silnie cienki jest cienki, nic więc nie stoi na przeszkodzie, by potraktować zbiory silnie cienkie jako jeszcze jeden przykład zbiorów małych. Tu jednak znów niespodzianka: nie wiadomo dotąd, czy zbiory silnie cienkie tworzą σ — ideał, ba, nie wiadomo nawet, czy suma dwóch zbiorów silnie cienkich jest zawsze zbiorem silnie cienkim.

W tym miejscu przerwiemy naszą wycieczkę po krainie zbiorów małych. Podane tu przykłady rodzin takich zbiorów bynajmniej nie wyczerpują wszystkich pojęć „małości" zbioru badanych w matematyce. Dają one jednak wyobrażenie o rozważaniach prowadzonych w tej interesującej teorii i o pewnym ważnym fakcie metodologicznym. Często mając na uwadze znany obiekt o jakiejś własności próbuje się wyodrębnić te jego cechy, które o niej w przekonaniu badaczy przesądzają. Stworzone w ten sposób pojęcie okazuje się czasem nie pasować do pierwotnych wyobrażeń, ujawniane są przykłady innych obiektów spełniających wprawdzie przyjętą definicję, ale w intuicyjnym odczuciu nie mających żądanej własności. (Przykład takiej sytuacji podaliśmy mówiąc o rozbiciu prostej na dwa zbiory małe w różnym sensie, przeczy on w pewnym stopniu przekonaniu, że intuicje związane z małością zbiorów miary zero i cienkich są trafne.) Zmusza to zawsze do zrewidowania intuicji i głębszego wniknięcia w sens rozważanego pojęcia (w naszym przypadku małości zbioru).

Rozwiązanie zadania F 155. Załóżmy, że parowóz jeździ po kołowym torze i przejdźmy do układu odniesienia związanego z powietrzem. W tym układzie odniesienia dym jest nieruchomy i wyznacza tor parowozu względem powietrza, natomiast środek okręgu, po którym porusza się parowóz, przemieszcza się z prędkością równą co do wartości prędkości wiatru względem powierzchni ziemi, lecz przeciwnie skierowaną. W układzie odniesienia związanym z powietrzem tor parowozu, a zatem i kształt śladu dymu jest po prostu torem punktu poruszającego się jednostajnie wokół środka okręgu, który jednocześnie przemieszcza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Wartości prędkości liniowych obu ruchów są niezależne. Tor parowozu jest więc uogólnioną cykloidą. Tylko w jednym przypadku cykloida ma charakterystyczny „dziobek", taki jaki tworzy dym przedstawiony na rysunku. Tak jest, gdy wartości obu prędkości są równe. Tak więc prędkość wiatru jest równa $v_w = 36$ km/h. Ponieważ „dziobek" został przesunięty przez wiatr względem Ziemi, a w chwili jego tworzenia się prędkość wiatru musiała być styczna do toru, więc wystarczy z wierzchołka „dziobka" poprowadzić styczną do torów, aby otrzymać kierunek prędkości wiatru względem powierzchni ziemi. (Wartość promienia zakrętu była oczywiście zbędna.)

Układ odniesienia związany z powietrzem



Układ odniesienia związany z ziemią