Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 1/1984

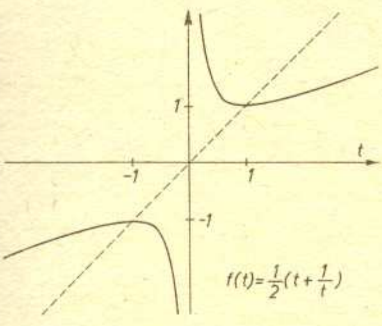
| | | |
|---|---|---|
| Jacek Uryga | - Bytom | 50,31pkt |
| Jerzy Janowicz | - Bolesławiec | 49,18pkt |
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 47,30pkt |
| Włodzimierz Szymczyk | - Zielonka | 42,42pkt |
| Wojciech Olszewski | - Brwinów | 40,35pkt |
| Jerzy Milczarek | - Gorzów Wlkp | 40,30pkt |
| Jerzy Małopolski | - Kraków | 39,37pkt |
| Edward Orzechowski | - Warszawa | 36,74pkt |

Współczynniki trudności zadań 73, 74, 75:
1,55 3,69 2,31

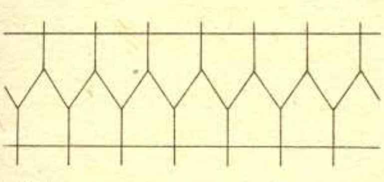
I oto mamy dwóch Weteranów. Gratulujemy! Dwa i pół roku trwania ligi zadaniowej okazało się wystarczające na to, by dwaj uczestnicy - pan Jerzy Janowicz i pan Jacek Uryga - zdołali wykonać po trzy rundy czterdziestoczteropunktowe. Tytuł Weterana uzyskali równocześnie, dystansując dość znacznie pozostałych współuczestników, z których, w chwili obecnej, jeszcze tylko dwóch ma za sobą po dwie rundy.

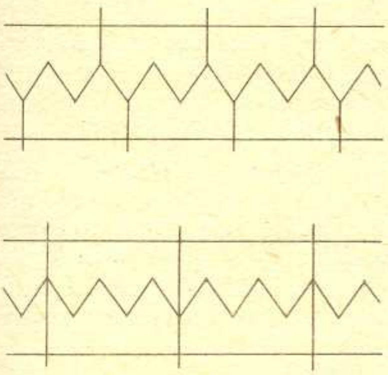
Ponieważ tytuł Weterana - to wszystko, co nasz regulamin oferuje, a mamy nadzieję, że Weterani nie będą chcieli rozstać się z ligą, zwracamy się do Czytelników z prośbą o pomysły co do formy dalszego honorowania jej najwytrwalszych uczestników.

Klub 44 liczy w tej chwili 17 członków; siedemnastym jest pan Tomasz Rawlik, a z tabeli widać, że raźno zbliżamy się do dwudziestki.



Rys. 1


Rys. 2


Rys. 3

# Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

*Redaguje dr Marcin E. KUCZMA*

# Klub 44

## Rozwiązania zadań z numeru 3/1984

Przypominamy treść zadań:

**79.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$2v = u+1/u \quad 2x = v+1/v \quad 2y = x+1/x \quad 2u = y+1/y.$$

**80.** Czy istnieje parkietaż płaszczyzny utworzony z przystających wypukłych: a) pięciokątów, b) siedmiokątów, c) ośmiokątów? Czy odpowiedzi zmienią się, jeśli nie będziemy żądać wypukłości?

**81.** Liczby naturalne $a$, $b$ spełniają warunki: $a \equiv -1 \pmod b$, $b \equiv 1 \pmod 2$. Niech $c_n = a^{b^n}+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dowieść, że dla każdego $n$ liczba $c_{n+1}$ jest podzielna przez $bc_n$.

**79.** Piszmy $x_1, x_2, x_3, x_4$ odpowiednio zamiast $u, v, x, y$ oraz przyjmijmy $x_5 = x_1$. Dane równania przybierają postać: $x_{i+1} = f(x_i)$, gdzie $f(t) = (1/2)(t+1/t)$. Z przebiegu funkcji $f$ (rys. 1) widać, że wszystkie cztery liczby $x_i$, będąc wartościami tej funkcji, muszą leżeć albo w przedziale $\langle 1,+\infty)$ albo w $(-\infty,-1\rangle$. Ponieważ $f(t) < t$ dla $t > 1$ oraz $f(t) > t$ dla $t < -1$, więc jeśli $x_1 > 1$ lub $x_1 < -1$, to ciąg $x_1, \ldots, x_5$ jest ściśle monotoniczny, wbrew temu, że $x_5 = x_1$. Wobec tego $x_1 = \pm 1$, a zatem jedynymi rozwiązaniami danego układu są $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ oraz $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

**80.** Niech $W$ będzie wypukłym $k$-kątem i przypuśćmy, że istnieje parkietaż płaszczyzny utworzony z przystających kopii $W$. Oznaczmy przez $S$ pole $W$, a przez $d$ średnicę najmniejszego koła zawierającego $W$. Ustalmy liczbę $r > d$ i weźmy pod uwagę koło $K$ o promieniu $r$ oraz koła współśrodkowe z $K$ o promieniach $r-d$, $r+d$. Niech $n_1$ oznacza liczbę kopii $W$ całkowicie zawartych w $K$, a $n_2$ — liczbę kopii $W$, mających co najmniej jeden wierzchołek w $K$. Zachodzą nierówności: $n_1 S \geqslant \pi(r-d)^2$, $n_2 S \leqslant \pi(r+d)^2$. Suma kątów wszystkich tych pierwszych $n_1$ wielokątów wynosi $s_1 = (k-2)\pi n_1$. Liczba węzłów pokrycia leżących w $K$ jest nie większa niż $kn_2/3$, ponieważ każdy z rozważanych $n_2$ wielokątów ma $k$ wierzchołków, a w każdym węźle stykają się co najmniej 3 wielokąty. Suma kątów w każdym węźle wynosi $2\pi$, a więc suma $s_2$ wszystkich kątów w rozważanych węzłach spełnia nierówność $s_2 \leqslant 2\pi\cdot kn_2/3$. Oczywiście $s_1 \leqslant s_2$. Stąd, uwzględniając poprzednie nierówności, dostajemy po krótkich rachunkach:

$$\frac{3(k-2)}{2k} \leqslant \left(\frac{r+d}{r-d}\right)^2.$$

Ponieważ liczba $r$ może być dowolnie wielka, a $d$ jest ustalone, możemy przejść po prawej stronie do granicy ($r \to \infty$), otrzymując w efekcie nierówność $3(k-2) \leqslant 2k$, czyli $k \leqslant 6$.

Tak więc odpowiedź na pytania b) i c) jest przecząca. Odpowiedź na pytanie a) jest twierdząca (rys. 2). Bez żądania wypukłości również odpowiedź na pytania b) i c) staje się twierdząca (rys.3).

**81.** Wobec nieparzystości $b$, dla dowolnej liczby naturalnej $k$ jest spełniona równość oraz kongruencja

$$\frac{k^b+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{b-1}(-k)^j \equiv \sum_{j=0}^{b-1} 1 = b \pmod{k+1}.$$

Przyjmując w szczególności $k = a^{b^n}$, dostajemy $c_{n+1}/c_n \equiv b \pmod{c_n}$, a więc istnieje liczba całkowita $q_n$ taka, że

$$(*) \qquad c_{n+1} = c_n(q_n c_n + b).$$

Ponieważ $c_0 = a+1$, więc z równości (*) wynika przez indukcję podzielność wszystkich liczb $c_n$ przez $b$. Stąd, znów na mocy (*), otrzymujemy tezę zadania.

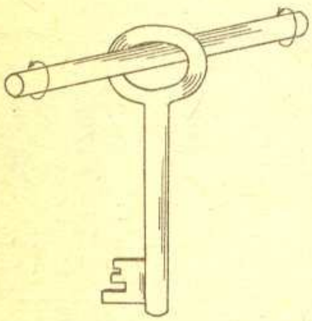
# Zadania

*Redaguje dr Krzysztof S. NOWIŃSKI*

**M 368.** Dla danej liczby trzycyfrowej $n = 100a+10b+c$ $(0 \leqslant a, b, c \leqslant 9)$ utwórzmy średnią arytmetyczną $p$ sześciu liczb otrzymanych przez wszystkie przestawienia cyfr $a, b, c$. Znaleźć wszystkie takie liczby $n \geqslant 100$, dla których $p = n$.
Rozwiązanie na str. 13

**M 369.** Wykazać, że kwadrat o średnicy 1 $\left(\text{o boku } \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ można podzielić na trzy zbiory o średnicy $\frac{\sqrt{130}}{16}$, a nie można podzielić na trzy zbiory o średnicach mniejszych.

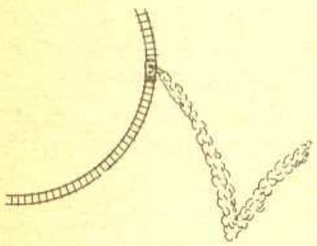
Średnicą zbioru $A$ nazywamy taką najmniejszą liczbę $d$, że odległość dowolnych punktów z $A$ nie jest większa niż $d$. Oznaczamy ją przez diam $A$.
Rozwiązanie na str. 5



**M 370.** Wykazać, że nie istnieje jedenastowyrazowy rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach będących liczbami pierwszymi nie większymi od 20 000.
Rozwiązanie na str. 13

*Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ*

**F 154.** Na walcowym pręcie zawieś klucz. Dobierz takie nachylenie pręta, by klucz nie ześlizgiwał się, a pchnięty ku dołowi — zatrzymywał się po niewielkim odcinku drogi. Zacznij delikatnie obracać pręt. Co dzieje się z kluczem? Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 3



**F 155.** Dym z poruszającego się po zakręcie parowozu unoszony jest przez poziomy wiatr. Kształt śladu dymu przedstawiono na rysunku (widok z góry). Korzystając z rysunku określ prędkość wiatru przy założeniu, że jest ona stała. Prędkość parowozu wynosi $v = 36$ km/h, promień zakrętu $R = 200$ m. (Na podstawie „Kwanta” 9/1983.)
Rozwiązanie na str. 7

## Patrz w niebo

Wielokrotnie pisaliśmy tu o obserwacjach nieba w innych niż optyczny zakresach fal, przede wszystkim o fascynujących wynikach radioastronomii i astronomii rentgenowskiej. Dziś chcemy wspomnieć o obserwacjach w podczerwieni. Podczerwień to długość fali znacznie bliższa optycznej, co nie znaczy jednak, że łatwiej ją obserwować.

Promieniowanie podczerwone w zakresie 1—30 $\mu$m jest w znacznym stopniu absorbowane przez atmosferę ziemską, fale o większej długości (do 1000 $\mu$m) są pochłaniane całkowicie. Astronomowie jednak uważają ten zakres za bardzo interesujący dla poszerzenia naszej wiedzy o Wszechświecie.

Przed rokiem 1983 obserwacje podczerwone można było wykonywać jedynie przy użyciu potężnych teleskopów optycznych (4 m średnicy lub więcej) pracujących na szczytach wysokich gór (3 km i więcej) — w takich warunkach można było spodziewać się najmniejszych strat w atmosferze.

W zeszłym roku astronomia podczerwona weszła w nowy etap rozwoju. 25 stycznia wystrzelono na orbitę specjalnego satelitę przeznaczonego do obserwacji w tym zakresie fal. Nazywał się IRAS (Infrared Astronomical Satellite). Miał pracować około 7 miesięcy. Pracował do 21 listopada.

Warto uświadomić sobie fakt, że promieniowanie podczerwone emitowane jest przez ciała już o temperaturze kilkudziesięciu kelwinów. Skoro tak, to należało uniknąć takiej sytuacji, w której najsilniejszym źródłem rejestrowanym przez detektory satelity byłby ... tenże satelita. W tym celu cały teleskop o masie ok. 1 tony musiał zostać ochłodzony do temperatury bliskiej zera bezwzględnego. Przez 10 miesięcy pracy ponad 70 kg nadciekłego helu chłodziło satelitę do temperatury 2,4 K. Trzeba przyznać, że już tylko ten rezultat jest wcale niebagatelnym osiągnięciem technicznym.

W tym czasie IRAS „obejrzał” dwukrotnie 95% nieba. Wyniki tych obserwacji dopiero zaczynają pojawiać się w czasopismach astronomicznych. Wiele rewelacji wymaga potwierdzenia przy użyciu kolejnych kosmicznych obserwatorów podczerwieni. Możliwe, że w ciągu najbliższych 10 lat wystrzelone będą dwa kolejne teleskopy podczerwone.

*dr Tomasz CHLEBOWSKI*