O tym, jak Herakles walczył z hydrą, czyli o niezupełności arytmetyki raz jeszcze

Dr Roman MURAWSKI

W 1931 r. 26-letni naówczas matematyk i logik wiedeński Kurt Gödel opublikował liczącą niewiele ponad 20 stronic pracę, która miała okazać się jedną z najważniejszych prac w zakresie podstaw matematyki. Udowodnił w niej, że system arytmetyki Peano, który, jak wierzono, jest adekwatną aksjomatyzacją teorii liczb, jest niezupełny. W ten sposób okazało się, że programu Hilberta aksjomatyzacji matematyki nie da się zrealizować.

Arytmetyką Peano nazywamy system sformalizowany oparty na aksjomatach podanych przez włoskiego matematyka Giuseppe Peano w 1889 r. Używając współczesnej symboliki możemy je zapisać następująco: ($S(x)$ należy traktować jako liczbę naturalną następną po x, tzn. $x+1$):

$$S(x) = S(y) \rightarrow x = y,$$

$$0 \neq S(x),$$

$$x+0 = x,$$

$$x+S(y) = S(x+y),$$

$$x \cdot 0 = 0,$$

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x,$$

$$(\varphi(0) \mathbin{\&} \bigwedge_x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \bigwedge_x \varphi(x).$$

Ostatni aksjomat, zwany aksjomatem indukcji, jest schematem nieskończenie wielu aksjomatów — dla każdej formuły $\varphi(x)$ języka arytmetyki Peano otrzymujemy jeden aksjomat.

Gödel za pomocą bardzo przemyślnej metody, zwanej dziś metodą arytmetyzacji lub gödelizacji, wykorzystując pewne znane już od starożytności paradoksy (dokładniej paradoks kłamcy) zbudował zdanie, o którym udowodnił, że jest prawdziwe (tzn. stwierdza prawdziwe fakty o liczbach naturalnych), ale jest niezależne od arytmetyki Peano. Oznacza to, że zdania tego nie można ani udowodnić, ani obalić na gruncie aksjomatów Peano. Nie pomoże też nic dołączenie tego zdania jako nowego aksjomatu, bo wtedy także znajdzie się nowe zdania nierozstrzygalne (na gruncie tej silniejszej już teorii). Nigdy więc nie uda się zbudować systemu sformalizowanego, który dowodziłby wszystkich zdań prawdziwych i tylko zdań prawdziwych o liczbach naturalnych. A zatem program Hilberta jest nierealizowalny.

Wynik Gödla pozostawiał jednak jeszcze pewien cień nadziei i nie przekreślał definitywnie zamiarów Hilberta. Otóż zdanie znalezione przez Gödla mówiło co prawda w ostatecznym rozrachunku o liczbach naturalnych, było jednak bardzo sztuczne z punktu widzenia „normalnego" (tzn. nie zajmującego się logiką i podstawami matematyki) matematyka. Można być prawie pewnym, że specjalista od teorii liczb nigdy w swych badaniach na takie zdanie nie natrafi i nigdy nie będzie pytał, czy własności liczb naturalnych, o których mówi to zdanie, istotnie mają miejsce. Nadal więc można było mieć nadzieję, że wszystkie sensowne i matematycznie interesujące zdania o liczbach naturalnych dadzą się rozstrzygnąć w systemie arytmetyki Peano. Niepokojąca jest tu oczywiście niejasność określenia „sensowny i matematycznie interesujący", ale w praktyce sprawa okazuje się znacznie prostsza i matematycy są na ogół zgodni co do tego, czy dany problem lub dany wynik są sensowne i matematycznie interesujące.

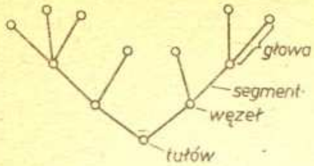
Stan takiej niepewności co do ostatecznych losów programu Hilberta trwał dość długo. Dopiero w 1977 r. udało się pokazać, że nawet ograniczenie się do zdań sensownych i matematycznie interesujących nie może uratować programu formalistów. Otóż w tym właśnie roku J. Paris z Uniwersytetu w Manchesterze podał przykład zdania, które miało treść kombinatoryczną, było prawdziwe, ale niezależne od arytmetyki Peano. Co więcej, Paris wynalazł nową metodę uzyskiwania takich przykładów, które po opublikowaniu jego pracy (a nawet jeszcze wcześniej, gdyż wieść o jego wyniku rozniosła się lotem błyskawicy wśród logików, a odbitki jego pracy zaczęły krążyć z rąk do rąk) zaczęły się mnożyć.

Tak więc w 46 lat po wyniku Gödla pokazano, że są zdania sensowne i matematycznie interesujące, które są prawdziwe, ale niezależne od aksjomatów Peano. Ostatnie więc nadzieje uratowania programu Hilberta upadły.

Ciągle jednak jeszcze było pewne „ale". Zdanie Parisa nie miało mianowicie treści czysto teorioliczbowej. Mówiło ono co prawda o liczbach naturalnych, ale ostatecznie traktowało o skończonych zbiorach tych liczb, a więc miało treść kombinatoryczną. Wkrótce jednak usunięto i to „ale". Jesienią 1981 r. L. Kirby i J. Paris podali bowiem przykład zdania, które miało już treść czysto teorioliczbową, które jest prawdziwe, ale którego nie można udowodnić na gruncie aksjomatów Peano.

W arytmetyce Peano możemy mówić o zbiorach skończonych liczb naturalnych dzięki metodzie kodowania. Mając bowiem dany zbiór $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ gdzie a_i jest liczbą naturalną oraz $a_1 < \dots < a_n$, możemy go jednoznacznie zakodować za pomocą liczby naturalnej $(p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n})$, gdzie p_i jest i-tą liczbą pierwszą. Liczbę tę nazywamy kodem zbioru X. Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że opisane kodowanie jest jednoznaczne.

Opiszemy teraz zdanie Kirby'ego-Parisa. Niech dane będą dwie liczby naturalne m, n, przy czym $n > 1$. Zdefiniujemy reprezentację liczby m przy zasadzie n następująco. Najpierw napiszemy liczbę m jako sumę potęg liczby n. Np. jeżeli $m = 266$, $n = 2$, to mamy $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$. To samo robimy teraz z każdym z wykładników tak długo, jak tylko jest to możliwe. W naszym przykładzie otrzymamy ostatecznie: $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$.



Rys. 1. Matematyczna hydra lernejska

Zdefiniujemy teraz liczbę $G_n(m)$. Jeżeli $m = 0$, to niech $G_n(m) = 0$. Jeżeli $m \neq 0$, to niech $G_n(m)$ będzie liczbą otrzymaną przez zastąpienie n w reprezentacji liczby m przy zasadzie n przez liczbę $n+1$ i odjęcie 1. Np. $G_2(266) = 3^{3^{3+1}}+3^{3+1}+2$. Następnie definiujemy pewien ciąg liczb naturalnych m_k (zwany ciągiem Goodsteina od nazwiska logika angielskiego, który już w 1944 r. badał takie ciągi). Kładziemy mianowicie: $m_0 = m$, $m_1 = G_2(m_0)$, $m_2 = G_3(m_1)$, $m_3 = G_4(m_2)$,... W naszym przykładzie mamy:

$$m_0 = m = 266 = 2^{2^{2+1}}+2^{2+1}+2^1,$$

$$m_1 = G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}}+3^{3+1}+2 \approx 10^{38},$$

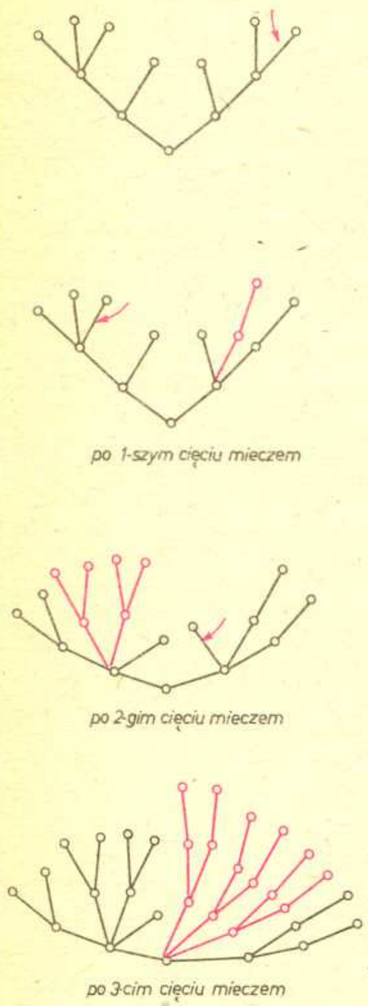
$$m_2 = G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}}+4^{4+1}+1 \approx 10^{616},$$

$$m_3 = G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}}+5^{5+1} \approx 10^{10000},$$

$$m_4 = G_5(m_3) = 6^{6^{6+1}}+5\cdot 6^6+5\cdot 6^5+5\cdot 6^4+5\cdot 6^3+5\cdot 6^2+5\cdot 6+5 \approx 10^{2000000}, \ldots$$

Widzimy więc, że wyrazy ciągu m_k rosną niebywale szybko. Okazuje się jednak, że prawdziwy jest następujący, nieprawdopodobny na pierwszy rzut oka, fakt—otóż dla dowolnej liczby m, czyli niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy budować ciąg Goodsteina, istnieje taki wskaźnik k, że $m_k = 0$. Udowodnił to w 1944 r. właśnie Goodstein. W jego dowodzie wykorzystane są pewne własności liczb porządkowych. Czy da się ten fakt udowodnić również w arytmetyce Peano? Odpowiedź brzmi nie! Kirby i Paris udowodnili właśnie, że zdanie: $(\bigwedge_m \bigvee_k (m_k = 0))$ jest nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki Peano. Dowód tego faktu jest oczywiście bardzo trudny i wykorzystuje pewne własności tzw. modeli niestandardowych arytmetyki Peano, jak i pewne własności liczb porządkowych. Dodajmy tylko, że miejsca k, na których zerują się ciągi Goodsteina, są niewyobrażalnie dalekie. Można np. pokazać, że ciąg zaczynający się od liczby 4 zeruje się dopiero na miejscu o numerze $3 \cdot 2^{402653211}-3$, co równa się około $10^{121000000}$ (porównajmy to z liczbą atomów we Wszechświecie, którą szacuje się na 10^{80}).

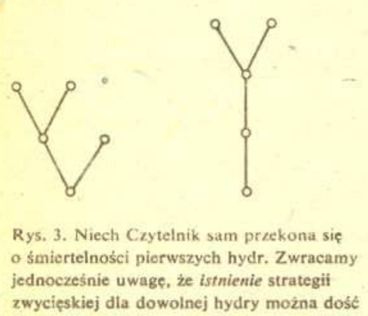
Za pomocą metod użytych przez Kirby'ego i Parisa do dowodu nierozstrzygalności wyżej opisanego zdania można też wykazać nierozstrzygalność w arytmetyce Peano innego zdania, które związane jest z mitologią (to wyjaśnia tytuł artykułu). Otóż, jak pamiętamy, Herakles po zabiciu, w napadzie szału, żony i dzieci, odzyskał rozum i udał się do wyroczni delfickiej po radę, jak ma odpokutować swą zbrodnię. Pytia kazała mu iść do Myken i zaciągnąć się na służbę u króla Eurysteusa. Tam miał wykonać dla niego 12 prac. Eurysteus polecił mu m.in. zabić hydrę lernejską. Jak wyglądał ten potwór? Matematyka i tu przychodzi nam z pomocą. Możemy ją sobie wyobrazić jako bestię przypominającą kształtem coś, co w matematyce nazywa się drzewem skończonym (rys. 1).



Rys. 2. Pierwsze ciosy mieczem; strzałka wskazuje, którą głowę ucina Herakles; linią przerywaną zaznaczone są świeżo wyrosłe fragmenty.

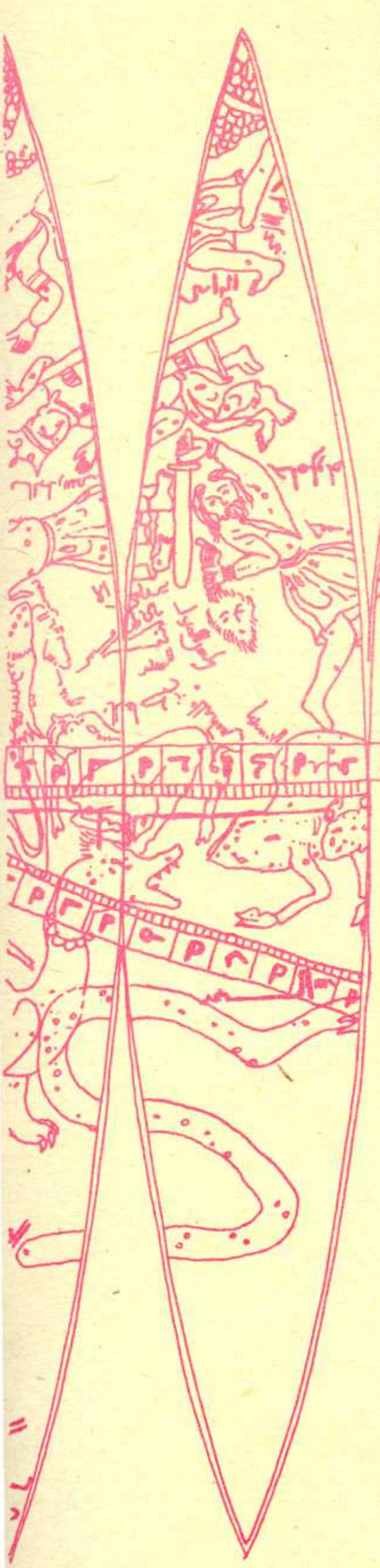
Walka między Heraklesem a hydrą przebiega teraz następująco. W każdym kroku tej walki Herakles odcina hydrze jedną głowę. Na miejscu odciętej głowy wyrasta nowa według następującej zasady: jeśli w kroku n-tym (czyli n-tym cięciem miecza) Herakles odciął jakąś głowę, to z węzła odległego o jeden segment od głowy uciętej wyrasta n kopii tej części hydry, która po odcięciu głowy znajduje się powyżej węzła osiągniętego przez cofnięcie się o jeden segment (rys. 2).

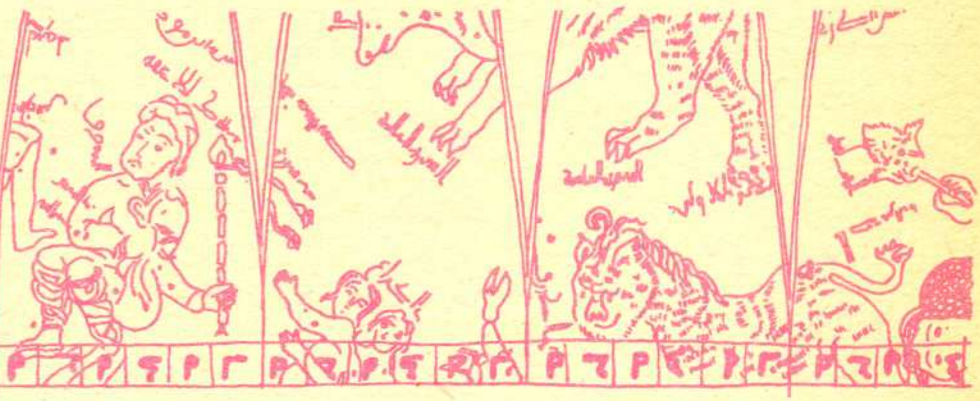
Herakles zwycięży, jeśli po pewnej skończonej liczbie kroków, czyli cięć mieczem, z hydry zostanie tylko tułów. Oczywiście może on odcinać głowy w dowolnej kolejności. Strategią nazwiemy funkcję określającą, którą głowę ma odciąć na danym etapie walki z hydrą, a strategią zwycięską nazwiemy taką strategię, która pozwala Heraklesowi wygrać z każdą hydrą. Otóż okazuje się, że każda strategia jest dla Heraklesa strategią zwycięską, czyli ucinając głowy dowolnej danej hydrze w jakikolwiek sposób Herakles zawsze zwycięży!


Rys. 3. Niech Czytelnik sam przekona się o śmiertelności pierwszych hydr. Zwracamy jednocześnie uwagę, że *istnienie* strategii zwycięskiej dla dowolnej hydry można dość łatwo udowodnić — dowód w numerze (Red.).

Popatrzmy na tę walkę jeszcze trochę inaczej. Hydrę możemy zakodować za pomocą liczby naturalnej (matematyk okazuje się więc mieć jeszcze większą przewagę nad hydrą niż Herakles, może ją bowiem zredukować do zwykłej pojedynczej niegroźnej liczby!). To pozwoli nam mówić o walce Heraklesa z hydrą w języku arytmetyki Peano. Nie możemy, niestety, mówić w tym języku o dowolnych strategiach, ale możemy mówić o strategiach efektywnych (dających się zakodować). Rozważmy zatem zdanie „Każda strategia efektywna jest zwycięską dla Heraklesa". Jest ono oczywiście słabsze od zdania głoszącego, że każda strategia jest zwycięska, o którym to zdaniu wiemy już, że jest prawdziwe. Otóż okazuje się, że nawet tak osłabionego stwierdzenia nie potrafimy rozstrzygnąć na podstawie aksjomatów Peano. Arytmetyka Peano jest więc za słaba, by dowodzić pewnych, skądinąd prawdziwych, faktów dotyczących walki Heraklesa z hydrą. Gdyby więc nasz umysł funkcjonował na takiej samej zasadzie, na jakiej dowodzi się twierdzeń w systemie Peano, to nigdy byśmy się nie dowiedzieli, czy Heraklesowi udało się pokonać hydrę czy nie.

Opuśćmy jednak uroczy świat mitologii i wróćmy jeszcze na chwilę do matematyki. Znalezienie przykładów zdań sensownych i interesujących z matematycznego punktu widzenia, a niezależnych od arytmetyki Peano ma oprócz pokazania całkowitej nierealizowalności programu Hilberta inne jeszcze, tym razem pozytywne znaczenie. Wzmacnia ono mianowicie nadzieje na to, że za pomocą tych nowych metod, które pozwalają dowodzić niezależności od arytmetyki Peano pewnych konkretnych zdań o treści teorioliczbowej, uda się również powiedzieć coś np. o wielkim twierdzeniu Fermata czy innych wielkich, a otwartych jak dotąd problemach teorii liczb. Może są one niezależne od arytmetyki Peano i do ich rozstrzygnięcia używać trzeba silniejszych środków niż te, które są dostępne w elementarnej teorii liczb? A czy są one rozstrzygalne na gruncie teorii mnogości? Czy też są od niej niezależne? Pozytywna odpowiedź na ostatnie pytanie, tzn. pokazanie ich nierozstrzygalności w teorii mnogości byłoby wynikiem o wielkiej doniosłości filozoficznej. Dowodziłoby bowiem ich absolutnej nierozstrzygalności, tzn. nierozstrzygalności za pomocą jakichkolwiek metod i środków dostępnych w matematyce.





Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 365. Wykazać, że jeżeli ściany czworościanu mają równe pola, to są trójkątami przystającymi.
Rozwiązanie na str. 3

M 366. Znaleźć 100 cyfr liczby $(7+\sqrt{50})^{100}$ następujących po przecinku.
Rozwiązanie na str. 3

M 367. Obliczyć sumę

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\dots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\dots$$

($[a]$ oznacza część całkowitą a, czyli największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą a).
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 153. W zamkniętym naczyniu umieszczonym w próżni znajduje się mieszanina cząsteczek tlenu i tej samej liczby cząsteczek helu. Jaki jest skład gazu wypływającego z naczynia w chwilę po zrobieniu w ściance niewielkiego otworu?
Rozwiązanie na str. 16