

Mizar MSE (10)

== DZISIEJSZY, OSTATNI ODCINEK KURSU JEST W CALOSCI NAPISANY
 == W MIZARZE - JEST TAKIM MALYM TEKSTEM MATEMATYCZNYM, W KTORYM
 == POSTAWIMY SZEREG PROBLEMOW DO ROZWIAZANIA.

== W TAKIM TEKSCIE OPRO CZ WSTĘPU ORAZ TWIERDZEN I ICH FORMALNYCH
 == DOWODOW. MOZEMY PISAC KOMENTARZE ZAWIERAJACE DODATKOWE
 == WYJASNIENIA TEGO CO ROBINY. KOMENTARZE TAKIE SA IGNOROWANE PRZEZ
 == MASZYNE W CZASIE ANALIZY TEKSTU. KOMENTARZ ROZPOCZYNA SIE OD
 == DWU ZNAKOW ROWNOSC I A KONCZY SIE WRAZ Z KONCEM LINIJKI. NASTEPNA
 == LINIA KOMENTARZA MUSI ZACZYNAĆ SIE ZNOWU OD DWU ZNAKOW ROWNOSC I.

== ROZPATRYWANA PRZEZ NAS TEORIA BĘDZIE FRAGMENTEM TEORII RELACJI
 == DWUARGUMENTOWYCH - TO JUZ COS POWAZNIEJSZEGO NIZ PORZADEK
 == LINIOWY DLA ULAMKOW.

ENVIRON

LÉT R,R',R'' DENOTE RELACJA: == ROZPATRYWANE RELACJE MAJA TE SAMA
 == DZIEDZINE I PRZECIWDZIEDZINE.
 LET X,X',X'',Y,Y',Y'',Z,Z',Z'' DENOTE ELEMENTY
 == TYMI SYMBOLAMI BĘDZIEMY OZNACZALI
 == ELEMENTY ZBIORU, NA KTORYM
 == OKRESLONE SA NASZE RELACJE.

== ZDEFINIUJEMY TERAZ SPOTYKANE DOBRO CZESTO W MATEMATYCE WLASNOSCI
 == RELACJI. WYRAZENIE "MAMYCX,R,YJ" NALEZY ROZUMIEC,
 == ZE MIEDZY X I Y ZACHODZI RELACJA R ALBO TEZ, TRAKTUJAC RELACJE
 == JAKO ZBIOR PAR: (X,Y) NALEZA DO R.

ZWROTNOSC: FOR R ST ZWROTNAERJ HOLDS FOR X HOLDS MAMYCX,R,XJ
 IZWROTNOSC: FOR R ST NOT ZWROTNAERJ

PRZECIWSWROTNOSC: FOR R ST PRZECIWSWROTNAERJ HOLDS
 FOR X HOLDS NOT MAMYCX,R,XJ

1PRZECIWSWROTNOSC: FOR R ST NOT PRZECIWSWROTNAERJ
 EX X ST MAMYCX,R,XJ

SYMETRIA: FOR R ST SYMETRYCZNAERJ HOLDS
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ HOLDS MAMYCY,R,XJ

1SYMETRIA: FOR R ST NOT SYMETRYCZNAERJ
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & NOT MAMYCY,R,XJ

ASYMETRIA: FOR R ST ASYMETRYCZNAERJ HOLDS
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ HOLDS NOT MAMYCY,R,XJ

1ASYMETRIA: FOR R ST NOT ASYMETRYCZNAERJ
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ

ANTYSYMETRIA: FOR R ST ANTYSYMETRYCZNAERJ HOLDS
 FOR X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ HOLDS X=Y

1ANTYSYMETRIA: FOR R ST NOT ANTYSYMETRYCZNAERJ
 EX X,Y ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,XJ & X<Y

PRZECHODNIOSC: FOR R ST PRZECHODNIACERJ HOLDS
 FOR X,Y,Z ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,ZJ
 HOLDS MAMYCX,R,ZJ

1PRZECHODNIOSC: FOR R ST NOT PRZECHODNIACERJ
 EX X,Y,Z ST MAMYCX,R,YJ & MAMYCY,R,ZJ &
 NOT MAMYCX,R,ZJ

SPOJNOSC: FOR R ST SPOJNAERJ HOLDS
 FOR X,Y HOLDS MAMYCX,R,YJ OR MAMYCY,R,XJ

1SPOJNOSC: FOR R ST NOT SPOJNAERJ
 EX X,Y ST NOT MAMYCX,R,YJ & NOT MAMYCY,R,XJ

ZAWIERANIE: FOR R,R' ST ZAWIERACER,R,R'J HOLDS
 FOR X,Y ST MAMYCX,R',YJ HOLDS MAMYCX,R,YJ

1ZAWIERANIE: FOR R,R' ST NOT ZAWIERACER,R,R'J
 EX X,Y ST MAMYCX,R',YJ & NOT MAMYCX,R,YJ

ROWNOSC: FOR R,R' HOLDS R=R' IFF ZAWIERACER,R,R'J & ZAWIERACER,R,R'J

== WYRAZENIE ZAWIERACER,R,R'J NALEZY ROZUMIEC: R' JEST ZAWARTE W R.
 == DLA WYGODNIEJSZEGO SFORMULOWANIA PEWNYCH ZADAN USTALIMY DWIE
 == DOWOLNE RELACJE.

GIVEN P,P' BEING RELACJA

== WPROWADZIMY PEWNE ODWZOROWANIE W DZIEDZINIE NASZYCH RELACJI.

AX1: FOR X EX Y ST ICX,YJ
 AX2: FOR X EX Y ST ICY,XJ

== POWYZSZE AKSJOMATY GWARANTUJA, ZE I JEST OKRESLONA W CALYM
 == ZBIORZE ELEMENTOW I PRZEKSZTALCA GO NA CALY TEN ZBIOR.

AX3: FOR X,Y,X',Y' ST ICX,X'J & ICY,Y'J HOLDS X=Y IFF X'=Y'

== TEN AKSJOMAT DAJE GWARANCJE, ZE NASZE ODWZOROWANIE JEST WZAJEMNIE
 == JEDNOZANCA FUNKCJA: NASTEPNY ZAS MOWI, ZE PRZEPROWADZA ONA
 == RELACJE P NA RELACJE P' I NA ODWROT.

AX4: FOR X,Y,X',Y' ST ICX,X'J & ICY,Y'J
 HOLDS MAMYCX,P,YJ IFF MAMYCX',P',Y'J

== OCZYWISCIE NIE ZDEFINIOWALISMY WSZYSTKICH UZYWANYCH W MATEMATYCE
 == WLASNOSCI RELACJI. MOZE WARTO TYLKO WSPOMNIEC, ZE RELACJE NAZYWA
 == SIE PORZADKIEM, GDY JEST ZWROTNA, PRZECHODNIA I ANTYSYMETRYCZNA,
 == A NAZYWA SIE ROWNOWAZNOSCIA, GDY JEST ZWROTNA, PRZECHODNIA
 == I SYMETRYCZNA. W DALSZYM CIAGU ZAJMIEMY SIE USTALENIEM ZALEZNOSCI
 == POMIEDZY WPROWADZONYMI WLASCIWOSCMI RELACJI.

BEGIN

== ZACZNIEMY OD POKAZANIA, ZE RELACJA SPOJNA JEST ZWROTNA.

LEMAT1: FOR R ST SPOJNAERJ HOLDS ZWROTNAERJ
 PROOF LET R BE RELACJA SUCH THAT A: SPOJNAERJ
 NOW LET X BE ELEMENT
 THUS MAMYCX,R,XJ BY A,SPOJNOSC
 END
 HENCE THESIS BY IZWROTNOSC
 END

== DALSZE LEMATY ZOSTAWIAMY JAKO ZADANIA DO UDOWODNIENIA PRZEZ
 == CZYTELNIKOW.

LEMAT11: FOR R,R' ST ZAWIERACER,R,R'J & ZWROTNAERJ
 HOLDS ZWROTNAERJ

LEMAT12: FOR R,R' ST ZAWIERACER,R,R'J & SPOJNAERJ &
 ANTYSYMETRYCZNAERJ
 HOLDS ZAWIERACER,R,R'J

LEMAT13: FOR R ST PRZECIWSWROTNAERJ & PRZECHODNIACERJ
 HOLDS ASYMETRYCZNAERJ

LEMAT14: FOR R ST ASYMETRYCZNAERJ HOLDS PRZECIWSWROTNAERJ

LEMAT15: FOR R,R',R'' ST ZAWIERACER,R',R'J & ZAWIERACER,R',R'J &
 SPOJNAERJ & PRZECHODNIACERJ &
 ANTYSYMETRYCZNAERJ
 HOLDS PRZECHODNIACERJ & PRZECHODNIACERJ

== Z LEMATU 12 WYNIKA W SZEGOLNOSCI, ZE PORZADKU LINIOWEGO (TJ.
 == SPOJNEGO) NIE MOZNA TUJ BARDZIEJ "UPORZADKOWAC".
 == OSTATNIE ZADANIE Z TEJ SERII JEST NIECO BARDZIEJ SKOMPLIKOWANE
 == NIZ POPRZEDNIEJ W JEGO DOWODZIE WYGODNIE BĘDZIE SKORZYSTAC Z
 == POPRZEDNIO UDOWODNIONYCH LEMATOW.

== ZAJMIEMY SIE DALEJ WLASNOSCMI ZACHOWYWANYMI PRZEZ IZOMORFIZMY.
 == W NASZYM PRZYPADKU IZOMORFIZMEM JEST ZDEFINIOWANA WE WSTĘPIE
 == FUNKCJA I. NA POCZATEK ROZWIĄZEMY MALY PRZYKŁAD.

LEMAT2: ZWROTNAERJ IMPLIES ZWROTNAERJ
 PROOF ASSUME Z1: ZWROTNAERJ
 NOW LET X BE ELEMENT
 CONSIDER Y SUCH THAT Z2: ICY,XJ BY AX2
 MAMYCY,P,YJ BY ZWROTNOSC,Z1
 HENCE MAMYCX,P',XJ BY AX4,Z2
 END
 HENCE THESIS BY IZWROTNOSC
 END

== CZYTELNICZY ZECHCA UDOWODNIC NASTĘPUJACE LEMATY.

LEMAT21: SPOJNAERJ IFF SPOJNAERJ

LEMAT22: NOT ASYMETRYCZNAERJ IMPLIES NOT ASYMETRYCZNAERJ

LEMAT23: (EX X ST FOR Y HOLDS MAMYCX,P,YJ) IMPLIES
 (EX X ST FOR Y HOLDS MAMYCX,P',YJ)

LEMAT24: PRZECHODNIACERJ IMPLIES PRZECHODNIACERJ

LEMAT25: (FOR X EX Y ST MAMYCX,P,YJ) IMPLIES
 (FOR X EX Y ST MAMYCX,P',YJ)

== PODOBNIENIE JAK TYCH LEMATOW DOWODZI SIE, ZE P JEST PORZADKIEM,
 == WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY P' JEST PORZADKIEM I ANALOGICZNIE,
 == ZE P JEST ROWNOWAZNOSCIA, WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY P' JEST
 == ROWNOWAZNOSCIA. MOZE KTOS Z CZYTELNIKOW ZECHCE TO ZROBIĆ

== CZEKAMY NA ROZWIĄZANIA.

== WSZYSTKICH, KTORYCH ZAINTERESOWALI SIE MIZAREM I CHCIELIBY
 == WIEDZIEC O NIM WIECEJ LUB TEZ MAJA JAKIEKOLWIEK PYTANIA Z NIM
 == ZWIĄZANE PROSIMY O KONTAKT Z REDAKCJA LUB TEZ BEZPOSRĘDNI Z

== GRUPA M I Z A R
 == INSTYTUT MATEMATYKI
 == FILIA UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO W BIALYMSTOKU
 == UL. AKADEMICKA 2
 == 15-267 BIALYSTOK