$\otimes\sqrt{\int\!!} = 44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 12/1983

Małgorzata Czerniakowska	Gdańsk	47,47pkt
Artur Smolczyk	Tarnów Op.	45,68pkt
Jerzy Janowicz	Bolesławiec	43,48pkt
Tomasz Rawlik	Gliwice	43,07pkt
Jacek Uryga	Bytom	42,76pkt
Włodzimierz Szymczyk	Zielonka	38,56pkt
Jerzy Małopolski	Kraków	37,82pkt
Wojciech Olszewski	Brwinów	36,49pkt

Współczynniki trudności zadań 70, 71, 72:
2,28 3,15 1,31

Z radością i bardzo serdecznie witamy w naszym Klubie pierwszą Panią.

W chwili obecnej Klub 44 liczy szesnastu członków - a raczej: szesnaścioro. Numery 15 i 16 - to pani Czerniakowska i pan Smolczyk.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Rozwiązania zadań z numeru 2/1984

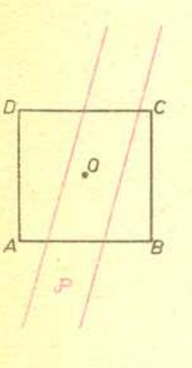
Przypominamy treść zadań:

76. Dany jest kwadrat o boku a. Poprowadzić dwie proste równoległe w odległości równej zadanej liczbie $d \leqslant a$ tak, by część kwadratu zawarta między nimi miała maksymalne pole. Obliczyć to pole.

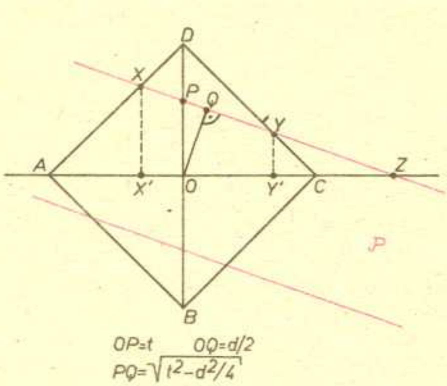
77. Jaka jest największa liczba części, na które 20 okręgów może podzielić sferę?

78. Dowieść, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ dla $n \in N$, $n \geqslant 2$.

76. Przy ustalonym kierunku prostych, ograniczających pas $\mathscr{P}$ o szerokości d, pas ten zakryje największą część kwadratu $ABCD$, gdy środek O tego kwadratu będzie leżał w połowie odległości między prostymi; dostrzegamy to, przesuwając cały pas równolegle z położenia, gdy kwadrat leży w całości po jednej stronie tego pasa, do położenia, gdy znajdzie się po drugiej jego stronie. Wystarczy więc ograniczyć uwagę do prostych przebiegających w odległości $d/2$ od punktu O. Dalej, można założyć, że pas $\mathscr{P}$ przykrywa pewne dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu (np. A i C) — w przeciwnym razie sytuacja wygląda jak na rysunku 1 i obracając pas $\mathscr{P}$ wokół punktu O aż do napotkania wierzchołków A i C zwiększamy pole części zakrytej przez $\mathscr{P}$.



Rys. 1



Rys. 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Położenie „górnej" prostej ograniczającej pas $\mathscr{P}$ jest wyznaczone (z dokładnością do symetrii względem przekątnej BD) przez jej punkt przecięcia z tą przekątną, czyli punkt P. Przyjmijmy więc za zmienną odległość $OP = t$. Zakres zmienności t : od $d/2$ (gdy pas jest równoległy do przekątnej AC) do $T = ad/\sqrt{4a^2-2d^2}$ (skrajnej wartości, przy której pas $\mathscr{P}$ jeszcze przykrywa punkt C).

Naszym zadaniem jest zmaksymalizować pole czworokąta $ACYX$, czyli zminimalizować pole trójkąta DXY. Wprowadźmy oznaczenia: $OX' = x$, $OY' = y$, $OZ = z$. Wówczas $XX' = AX' = a/\sqrt{2}-x$, $YY' = CY' = a/\sqrt{2}-y$. Zachodzą proporcje $XX' : ZX' = YY' : ZY' = PO : ZO = PQ : OQ$, które w terminach symboli t, x, y, z przybierają postać

$$\frac{a/\sqrt{2}-x}{z+x} = \frac{a/\sqrt{2}-y}{z-y} = \frac{t}{z} = \frac{\sqrt{t^2-d^2/4}}{d/2}.$$

Otrzymany układ pozwala wyrazić x, y, z przez t. Dostajemy:

$$x = \frac{d(a/\sqrt{2}-t)}{d+\sqrt{4t^2-d^2}}, \qquad y = \frac{d(a/\sqrt{2}-t)}{d-\sqrt{4t^2-d^2}}.$$

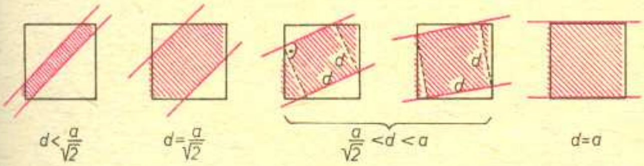
Pole trójkąta DXY równa się

$$\frac{1}{2}DX\cdot DY = \frac{1}{2}(\sqrt{2}OX')(\sqrt{2}OY') = xy = \frac{d^2(a/\sqrt{2}-t)^2}{2d^2-4t^2}.$$

Oznaczmy to wyrażenie przez $f(t)$. Pochodna $f'(t)$ równa się zeru dla $t = t_0 = d^2/(\sqrt{2}a)$, jest dodatnia dla $t > t_0$, ujemna dla $t < t_0$. Należy teraz sprawdzić, czy wartość t_0 należy do dziedziny f, czyli do przedziału $I = \langle d/2, T\rangle$. Nierówność $t_0 \leqslant T$, czyli $d\sqrt{4a^2-2d^2} \leqslant \sqrt{2}a^2$, jest spełniona automatycznie — jest bowiem równoważna nierówności $(a^2-d^2)^2 \geqslant 0$. Zatem t_0 może należeć do I lub leżeć na lewo od I:

1° Gdy $d < a/\sqrt{2}$, czyli gdy szerokość pasa jest mniejsza od połowy długości przekątnej kwadratu, wówczas $t_0 \notin I$, funkcja f jest w I rosnąca i przyjmuje minimum $f_{min} = (\sqrt{2}a-d)^2/4$ dla $t = d/2$; odpowiada to ustawieniu pasa $\mathscr{P}$ równolegle do przekątnej kwadratu.

2° Gdy $d \geqslant a/\sqrt{2}$, wówczas $t_0 \in I$ i funkcja f przyjmuje minimum $f_{min} = (a^2-d^2)/4$ dla $t = t_0$; odpowiada to ustawieniu pasa $\mathscr{P}$ pod kątem $\alpha = \arccos(a/\sqrt{2}d)$ do kierunku przekątnej; nietrudno sprawdzić, że punkty przecięcia krawędzi pasa z brzegiem kwadratu są wtedy też wierzchołkami pewnego kwadratu. W miarę, jak szerokość pasa wzrasta, kierunek optymalnego ułożenia pasa „przekręca się" od kierunku przekątnej do kierunku boku, jak to pokazuje rysunek 3.



Rys. 3

Maksymalna wartość pola części kwadratu przykrytej przez pas $\mathscr{P}$ równa się

$$a^2-2f_{min} = \begin{cases} d(\sqrt{2}a-d/2) & \text{gdy } d < a/\sqrt{2} \\ (a^2+d^2)/2 & \text{gdy } d \geqslant a/\sqrt{2} \end{cases}.$$

77. Niech k_n będzie największą liczbą części, na jakie n okręgów może podzielić sferę. Przypuśćmy, że mamy na sferze $n+1$ okręgów i wybierzmy jeden z nich. Pozostałe n okręgów dzieli sferę na k części $B_1, \ldots, B_k$, $k \leqslant k_n$. Wyróżniony okrąg może mieć z tamtymi okręgami najwyżej $2n$ punktów wspólnych. Punkty te dzielą go na m łuków, $m \leqslant 2n$. Każdy z tych łuków rozcina dokładnie jeden z obszarów B_i na dwie części i w ten sposób liczba obszarów wzrasta o m, czyli równa się $k+m \leqslant k_n+$ $+2n$. Oszacowanie to jest słuszne dla dowolnego zbioru $n+1$ okręgów na sferze, a zatem $k_{n+1} \leqslant k_n+2n$. Jeśli w powyższym rozumowaniu ograniczymy uwagę do okręgów kół wielkich, to wszystkie napisane nierówności staną się równościami, bo $(n+1)$-szy okrąg musi wtedy przeciąć każdy z pozostałych n okręgów w 2 punktach. Wynika stąd wzór rekurencyjny $k_{n+1} = k_n+2n$. Ponieważ $k_1 = 2$, więc przez indukcję $k_n = n^2-n+2$.
W szczególności $k_{20} = 382$.

78. $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Jak zmierzyć promień Ziemi za pomocą zegarka?

W jednym z numerów czasopisma *American Journal of Physics* znaleźliśmy opis bardzo prostej metody zmierzenia promienia Ziemi. Do wykonania pomiaru należy posiadać zegarek z sekundnikiem, znać swój wzrost oraz znaleźć się w bezchmurny dzień nad całkowicie spokojnym morzem (dwa ostatnie warunki szczególnie trudno spełnić nad Bałtykiem). Obserwujemy moment zachodu Słońca leżąc na plaży. Kiedy wstaniemy, będziemy mogli zaobserwować zachód Słońca po raz drugi. Znajomość różnicy czasów τ między dwoma zaobserwowanymi zachodami pozwoli nam wyznaczyć promień Ziemi. Znając czas τ możemy wyznaczyć kąt α (rys.) — to znaczy kąt między ostatnimi widzianymi promieniami obserwowanych zachodów Słońca (czas τ wynosi około 10 s, jest więc dość łatwy do zmierzenia).

Mamy teraz $\alpha = \dfrac{2\pi}{T}\tau$, gdzie T — czas trwania pełnego obrotu Ziemi (doba),

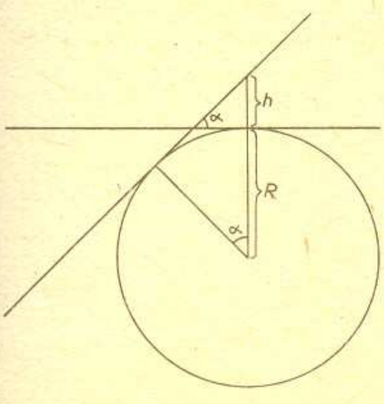
oraz $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{(R+h)^2-R^2}}{R+h}$, h — różnica wysokości punktów obserwacji.

Ponieważ $\dfrac{\tau}{T}$ i $\dfrac{h}{R}$ są bardzo małe, możemy w przybliżeniu przyjąć $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz

$2Rh+h^2 \approx 2Rh$, co daje $\dfrac{2\pi}{T}\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{R}}$, skąd $R = \dfrac{h}{2\pi^2}\left(\dfrac{T}{\tau}\right)^2$.

Powyższe rozumowanie odpowiada pomiarowi wykonanemu na równiku w dniu równonocy. Jeśli obserwacji dokonujemy na szerokości geograficznej φ i w dniu, w którym deklinacja Słońca wynosi δ (kąt między płaszczyzną równika i kierunkiem do Słońca), powinniśmy wzór na R zmodyfikować. Po analogicznych przybliżeniach otrzymujemy

$$R = \frac{hT^2}{2\pi^2\tau^2(\cos^2\varphi-\sin^2\delta)}.$$



Opisana metoda pozwala zmierzyć R z dokładnością do kilku procent. Wbrew pozorom jednak dokładne wykonanie pomiaru nie jest takie proste, gdyż bardzo wiele czynników wprowadza błędy systematyczne.

Dla tych, którzy znajdą czas i odpowiednie warunki, ogłaszamy konkurs na najlepiej wykonany pomiar — opis powinien zawierać podanie dokładnej metody wyznaczenia τ i h oraz dyskusję wszystkich czynników powodujących powstawanie błędów.
Wymieniamy przykładowo kilka możliwych problemów do przedyskutowania:

- trudność zmierzenia h od poziomu morza,
- długofalowe drganie powierzchni morza,
- występowanie refrakcji astronomicznej.

Najciekawszy opis wydrukujemy.

Redakcja