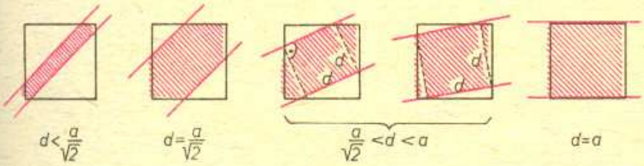
2° Gdy $d \geqslant a/\sqrt{2}$, wówczas $t_0 \in I$ i funkcja f przyjmuje minimum $f_{min} = (a^2 - d^2)/4$ dla $t = t_0$; odpowiada to ustawieniu pasa $\mathscr{P}$ pod kątem $\alpha = \arccos(a/\sqrt{2}d)$ do kierunku przekątnej; nietrudno sprawdzić, że punkty przecięcia krawędzi pasa z brzegiem kwadratu są wtedy też wierzchołkami pewnego kwadratu. W miarę, jak szerokość pasa wzrasta, kierunek optymalnego ułożenia pasa „przekręca się" od kierunku przekątnej do kierunku boku, jak to pokazuje rysunek 3.



Rys. 3

Maksymalna wartość pola części kwadratu przykrytej przez pas $\mathscr{P}$ równa się

$$a^2 - 2f_{min} = \begin{cases} d(\sqrt{2}a - d/2) & \text{gdy } d < a/\sqrt{2} \\ (a^2+d^2)/2 & \text{gdy } d \geqslant a/\sqrt{2} \end{cases}.$$

77. Niech k_n będzie największą liczbą części, na jakie n okręgów może podzielić sferę. Przypuśćmy, że mamy na sferze $n+1$ okręgów i wybierzmy jeden z nich. Pozostałe n okręgów dzieli sferę na k części $B_1, \ldots, B_k$, $k \leqslant k_n$. Wyróżniony okrąg może mieć z tamtymi okręgami najwyżej $2n$ punktów wspólnych. Punkty te dzielą go na m łuków, $m \leqslant 2n$. Każdy z tych łuków rozcina dokładnie jeden z obszarów B_i na dwie części i w ten sposób liczba obszarów wzrasta o m, czyli równa się $k+m \leqslant k_n + 2n$. Oszacowanie to jest słuszne dla dowolnego zbioru $n+1$ okręgów na sferze, a zatem $k_{n+1} \leqslant k_n + 2n$. Jeśli w powyższym rozumowaniu ograniczymy uwagę do okręgów kół wielkich, to wszystkie napisane nierówności staną się równościami, bo $(n+1)$-szy okrąg musi wtedy przeciąć każdy z pozostałych n okręgów w 2 punktach. Wynika stąd wzór rekurencyjny $k_{n+1} = k_n + 2n$. Ponieważ $k_1 = 2$, więc przez indukcję $k_n = n^2 - n + 2$.
W szczególności $k_{20} = 382$.

78. $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Jak zmierzyć promień Ziemi za pomocą zegarka?

W jednym z numerów czasopisma *American Journal of Physics* znaleźliśmy opis bardzo prostej metody zmierzenia promienia Ziemi. Do wykonania pomiaru należy posiadać zegarek z sekundnikiem, znać swój wzrost oraz znaleźć się w bezchmurny dzień nad całkowicie spokojnym morzem (dwa ostatnie warunki szczególnie trudno spełnić nad Bałtykiem). Obserwujemy moment zachodu Słońca leżąc na plaży. Kiedy wstaniemy, będziemy mogli zaobserwować zachód Słońca po raz drugi. Znajomość różnicy czasów τ między dwoma zaobserwowanymi zachodami pozwoli nam wyznaczyć promień Ziemi. Znając czas τ możemy wyznaczyć kąt α (rys.) — to znaczy kąt między ostatnimi widzianymi promieniami obserwowanych zachodów Słońca (czas τ wynosi około 10 s, jest więc dość łatwy do zmierzenia).

Mamy teraz $\alpha = \frac{2\pi}{T}\tau$, gdzie T — czas trwania pełnego obrotu Ziemi (doba),

oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R+h}$, h — różnica wysokości punktów obserwacji.

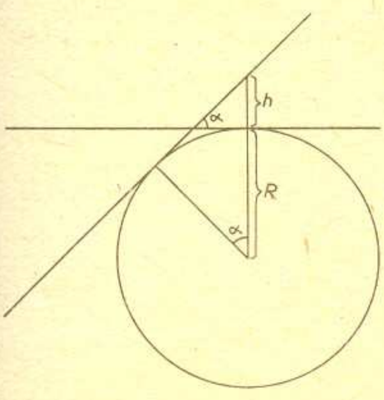
Ponieważ $\frac{\tau}{T}$ i $\frac{h}{R}$ są bardzo małe, możemy w przybliżeniu przyjąć $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz

$2Rh + h^2 \approx 2Rh$, co daje $\frac{2\pi}{T}\tau = \sqrt{\frac{2h}{R}}$, skąd $R = \frac{h}{2\pi^2}\left(\frac{T}{\tau}\right)^2$.

Powyższe rozumowanie odpowiada pomiarowi wykonanemu na równiku w dniu równonocy. Jeśli obserwacji dokonujemy na szerokości geograficznej φ i w dniu, w którym deklinacja Słońca wynosi δ (kąt między płaszczyzną równika i kierunkiem do Słońca), powinniśmy wzór na R zmodyfikować. Po analogicznych przybliżeniach otrzymujemy

$$R = \frac{hT^2}{2\pi^2\tau^2(\cos^2\varphi - \sin^2\delta)}.$$

Opisana metoda pozwala zmierzyć R z dokładnością do kilku procent. Wbrew pozorom jednak dokładne wykonanie pomiaru nie jest takie proste, gdyż bardzo wiele czynników wprowadza błędy systematyczne.



Dla tych, którzy znajdą czas i odpowiednie warunki, ogłaszamy konkurs na najlepiej wykonany pomiar — opis powinien zawierać podanie dokładnej metody wyznaczenia τ i h oraz dyskusję wszystkich czynników powodujących powstawanie błędów.
Wymieniamy przykładowo kilka możliwych problemów do przedyskutowania:

— trudność zmierzenia h od poziomu morza,
— długofalowe drganie powierzchni morza,
— występowanie refrakcji astronomicznej.

Najciekawszy opis wydrukujemy.

Redakcja