Jak szeroka może być wstęga Möbiusa

Wstęga Möbiusa to sklejony prostokątny pasek papieru, którego końce przed sklejeniem obróciliśmy o 180° (rys. 1).
Przypuśćmy, że pasek ma szerokość 1. Jasne jest, że im będzie dłuższy, tym łatwiej będzie otrzymać z niego wstęgę Möbiusa. Naszym zadaniem jest wyznaczenie takiej liczby λ, że przy pasku dłuższym od λ uda się skleić wstęgę, a przy krótszym nie.

Ważne jest, czy wstęga może mieć zagniecenia. Jeśli się na to zgodzimy, to rozwiązaniem będzie $\lambda = 0$. Wystarczy bowiem złożyć pasek w harmonijkę (parzystą liczbę razy), obrócić jeden koniec o 180° i skleić odpowiednie punkty (rys. 2). Jeśli nie chcemy mieć zagnieceń, odpowiedź jest inna.

Pokażemy, że $\lambda \in \left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\right]$ — lepszego oszacowania nie znamy i dokładniejsze wyznaczenie λ wydaje się być dosyć trudne.
Powierzchnię, którą możemy uzyskać z płaskiej kartki papieru bez zagniatania, nazwijmy powierzchnią *rozwijalną*. Jest to np. powierzchnia z rys. 3, walec, stożek. Nie będziemy wchodzić w szczegóły klasyfikacji takich powierzchni — wymienimy tylko pewne, potrzebne nam dalej własności. Są one intuicyjnie oczywiste.
Odcinek, który leży całkowicie na powierzchni i nie jest zawarty w żadnym dłuższym odcinku o tej własności, nazywamy *tworzącą*. Każdy punkt powierzchni nie leżący na jej brzegu jest punktem wewnętrznym jakiejś tworzącej.
Punkt, który jest punktem wewnętrznym dwóch różnych tworzących, nazywamy *punktem płaskim* — pewne jego otoczenie jest bowiem płaskie.
Jeśli punkt wewnętrzny powierzchni jest końcem pewnej tworzącej, to przechodzi przez niego jedyna nie kończąca się w nim tworząca o końcach należących do brzegu powierzchni. Oddziela ona obszar płaski od niepłaskiego (w pewnym jej otoczeniu — rys. 3).

Pokażemy, że jeśli wstęga Möbiusa ma być powierzchnią rozwijalną, to $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$. Nawińmy kilkakrotnie na wstęgę o długości l i szerokości 1 pasek papieru. Zaznaczmy na nim obszary płaskie i tworzące wstęgi na pozostałych obszarach. Po rozwinięciu otrzymamy wzór o okresie $2l$. Co więcej, druga połowa okresu powstaje z pierwszej przez przesunięcie o l i odbicie względem linii środkowej (rys. 4). Dorysujmy tworzące przechodzące przez punkty płaskie tak, by przez każdy punkt przechodziła dokładnie jedna tworząca i została zachowana wyżej opisana okresowość.
Dowolną tworzącą AB odbijmy względem linii środkowej i przesuńmy o l. Otrzymamy tworzącą CD, przy czym $AC+BD = 2l$. Przy nawijaniu na wstęgę Möbiusa odcinki CD i BA pokryją się — a więc odcinek AB tworzy z CD kąt 180°. Jeśli będziemy przesuwać punkt E od A do C, to kąt między tworzącą EF (z narysowanej przez nas rodziny) a AB będzie się zmieniał w sposób ciągły od 0° do 180°. Dla ustalonego n wybierzmy takie tworzące A_kB_k ($k = 1, \ldots, n-1$), by kąt między AB i A_kB_k był równy $\frac{k}{n}180°$ (rys. 5). Oczywiście kąt między $A_{k-1}B_{k-1}$ i A_kB_k nie jest mniejszy niż $\frac{180°}{n}$.
Wykażemy, że żadna z sum $A_kA_{k+1}+B_kB_{k+1}$ (gdzie $A_0 = A$, $B_0 = B$; $A_n = C$, $B_n = D$) nie jest mniejsza od a_{2n} — długości boku $2n$-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1. Załóżmy, że $A_{k+1}B_{k+1} \leqslant A_kB_k$ (rys. 6). Odcinek A_kE jest przesunięciem równoległym $A_{k+1}B_{k+1}$, $A_kF = A_kH = 1$ ($F \in A_kE$, $H \in A_kB_k$), $GF \parallel B_kE$ ($G \in A_kB_k$), łuk $B_{k+1}E$ jest przesunięciem równoległym łuku $A_{k+1}A_k$. Mamy ($\widehat{XY}$ oznacza odległość punktów X i Y zmierzoną po zaznaczonym łuku): $\widehat{A_kA_{k+1}}+\widehat{B_kB_{k+1}} = \widehat{EB_{k+1}}+\widehat{B_kB_{k+1}} \geqslant EB_k \geqslant FG \geqslant FH \geqslant a_{2n}$.
Ostatnia nierówność wynika z tego, iż $\sphericalangle FA_kH \geqslant \frac{180°}{n}$.
A zatem $2l = AC+BD \geqslant n \cdot a_{2n}$. Ale to ostatnie wyrażenie — połowa obwodu $2n$-kąta foremnego — zbiega do połowy długości okręgu, czyli π. Mamy więc żądaną nierówność $l \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Aby wykazać, iż $\lambda \leqslant \sqrt{3}$, wystarczy podać sposób sklejania wstęgi z paska o długości większej od $\sqrt{3}$. Sposób ten jest przedstawiony na rysunkach 7 i 8.

Nic więcej nie potrafimy powiedzieć o liczbie λ. Trudność polega na tym, iż we wstędze Möbiusa pasek nie może przenikać przez siebie, przecinać się. Tymczasem w oszacowaniu — $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$ nie korzystaliśmy z tego warunku. Co więcej, jeśli dopuścimy samoprzecinanie się, to z paska dłuższego od $\frac{\pi}{2}$ uda się skleić wstęgę. Aby pokazać, że $\lambda > \frac{\pi}{2}$, musimy wykorzystać położenie wstęgi w przestrzeni trójwymiarowej. Żadania tego typu są zwykle bardzo trudne. Z drugiej strony, aby wykazać, że $\lambda < \sqrt{3}$, trzeba znaleźć nową konstrukcję wstęgi, co wydaje się nieprawdopodobne.

J. R.

(na podstawie artykułu w miesięczniku *Kwant* 1/1979).

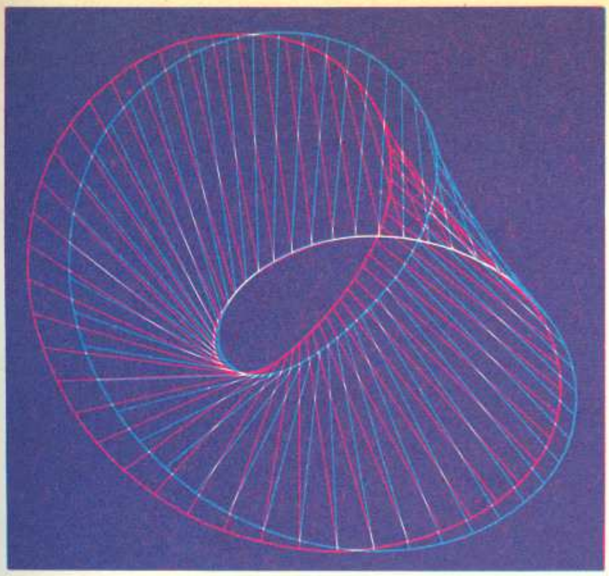
Jeśli dwa koła jakiejś maszyny zostaną połączone pasem transmisyjnym w kształcie wstęgi Möbiusa, pas będzie się ścierał jednakowo po „obu stronach".
Firma Goodrich Company nabyła patent na tego rodzaju zastosowanie wstęgi Möbiusa: U.S. Patent 2784834 12 marca 1957.

Kątem między odcinkami KL i MN leżącymi w przestrzeni nazywamy kąt KLN', gdzie odcinek LN' powstaje przez przesunięcie równoległe odcinka MN.

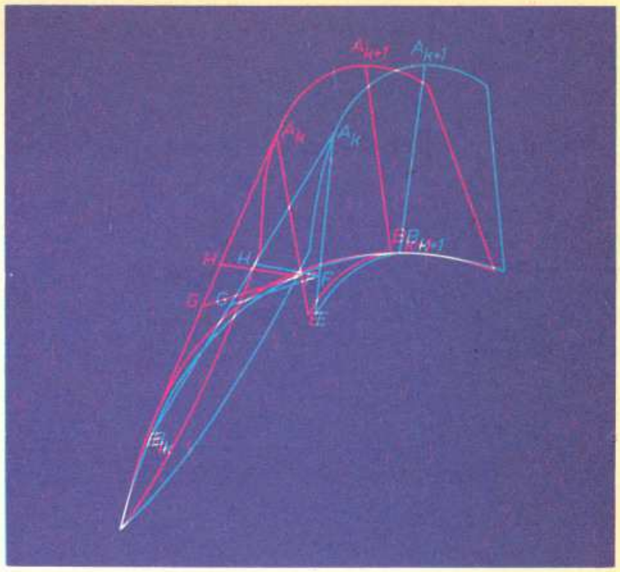
Rozwiązanie zadania F 153.
Średnia energia kinetyczna cząsteczek zależy tylko od temperatury i jest równa $\frac{3}{2}kT$ (k — stała Boltzmanna). Wynika stąd równość

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

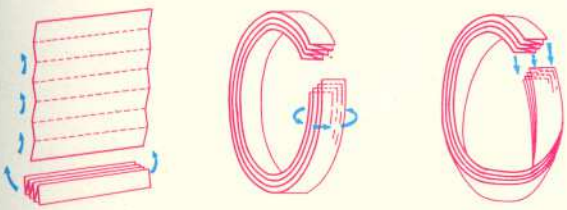
gdzie m_1, m_2 masy cząsteczek, a v_1, v_2 — ich średnie prędkości. Masa cząsteczki O_2 jest 8 razy większa niż masa He, a więc średnio prędkość cząsteczki helu będzie $2\sqrt{2}$ razy większa niż cząsteczki tlenu. Wobec tego cząsteczki helu będą $2\sqrt{2}$ razy częściej uderzać w ścianki, a także wpadać w otwór.



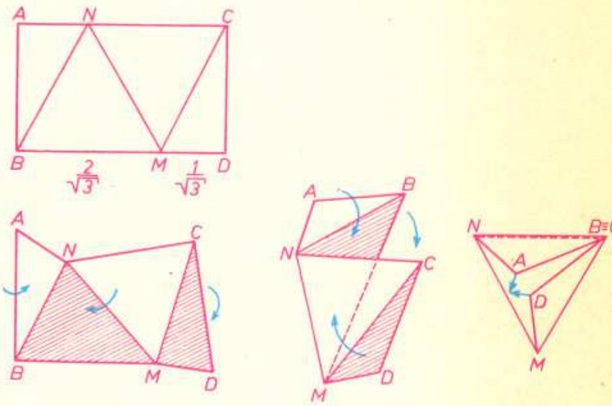
Rys. 1



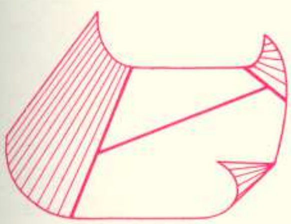
Rys. 6



Rys. 2

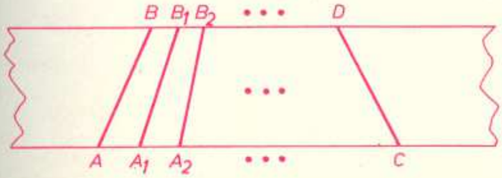


Rys. 7

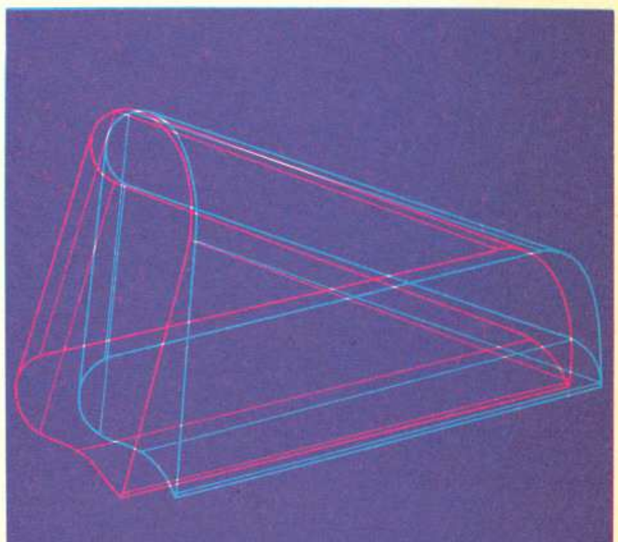


Rys. 3

Rys. 4



Rys. 5



Rys. 8