Nobel matematyków

Medal Fieldsa jest często nazywany ,,Nagrodą Nobla matematyków". Ustanowienie medalu jest bez wątpienia związane z faktem, że Alfred Nobel zdecydował się nie włączyć matematyki do nauk wartych ufundowanej przez niego nagrody. Nie ma udokumentowanych świadectw wyjaśniających to wykluczenie, ale ogólnie znana w społeczności matematyków plotka przypisuje to osobistemu konfliktowi pomiędzy Noblem a znanym szwedzkim matematykiem M. Mittag-Lefflerem. Ta legenda jest poparta listem przyjaciela J. C. Fieldsa, profesora J. L. Synge: ,,To od Fieldsa słyszałem o nieporozumieniach pomiędzy Noblem a Mittag-Lefflerem. Przypuszczam, że chodziło o osobistą zawiść, ... dla każdego kto widzi w matematyce ,,królową nauk" to wykluczenie z nagród Nobla wydaje się bardzo dziwne". Fields był przyjacielem Mittag-Lefflera i być może to także rzuca pewne światło na motywy ustanowienia nagrody dla matematyków.

Według legendy Nobel zwrócił się do znanych matematyków z pytaniem, czy Mittag-Leffler miałby szansę dostać za swoje wyniki międzynarodową nagrodę. Po twierdzącej odpowiedzi matematyka została usunięta z dyscyplin, za które miała być przyznawana fundowana przez Nobla nagroda.

Medale Fieldsa są przyznawane przez Międzynarodową Unię Matematyczną co cztery lata z okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków (tylko w ubiegłym roku, z powodu odroczenia o rok Kongresu w Warszawie, wręczono laureatom medale w rok po ich przyznaniu). Nagroda została ustalona zgodnie z testamentem profesora J. C. Fieldsa z Uniwersytetu w Toronto. Prof. Fields pracował nad teorią funkcji algebraicznych, znany jest jednak, przede wszystkim, jako zdolny administrator nauki. J. C. Fields zmarł w 1932 r., a pierwsi laureaci zostali nagrodzeni na Kongresie w Oslo w 1936 r. Od tego czasu przyznano 27 medali Fieldsa. Utarła się tradycja, że medale przyznawane są ,,młodym matematykom", co w praktyce oznacza wiek poniżej 40 lat.

W kuluarach tegorocznego Kongresu Matematyków mówiło się, że bliskim otrzymania medalu Fieldsa był jeden z polskich matematyków.

W 1982 r. medale otrzymali Alain Connes z Francji oraz William P. Thurston i Shing-Tung Yau z USA.

Listę wszystkich poprzednich laureatów medalu Fieldsa można znaleźć w *Delcie* 1/1976 i 2/1979.

Dwóch laureatów, W. Thurston i S. Yau, otrzymało medale Fieldsa między innymi za prace z zakresu topologii i geometrii rozmaitości trójwymiarowych (to znaczy przestrzeni wyglądających lokalnie jak świat, w którym żyjemy). W szczególności prace Thurstona przyczyniły się do lepszego poznania rozmaitości trójwymiarowych.

Trójwymiarowe rozmaitości według Thurstona

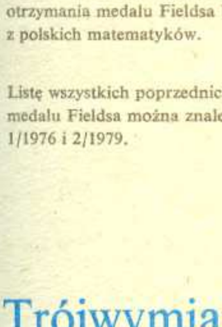
Dr Józef PRZYTYCKI

Rozmaitością n-wymiarową nazywamy przestrzeń lokalnie modelowaną przez n-wymiarową przestrzeń euklidesową. Dalej będziemy zajmować się głównie rozmaitościami zwartymi bez brzegu — takie n-wymiarowe rozmaitości nazywać będziemy krótko n-rozmaitościami.

Dokładniej: rozmaitość n-wymiarowa jest zbiorem spójnym (w jednym kawałku), lokalnie homeomorficznym z n-wymiarową przestrzenią euklidesową (zapewnia to jej metryzowalność) i zupełną (czyli zawiera swoje punkty skupienia). Np. płaszczyzna, sfera, koło domknięte; spośród nich tylko sfera jest n-rozmaitością ($n = 2$). Rozmaitości homeomorficzne utożsamiamy.

Jedyną 1-rozmaitością jest okrąg; oznaczamy go S^1.

2-rozmaitości, czyli powierzchni, jest nieskończenie wiele. Są to np. sfera (S^2), torus (T^2 — można go traktować jako sferę z doklejonym uszkiem), sfera z dwoma uszkami, z trzema itd., tzn. sfery z n uszkami.



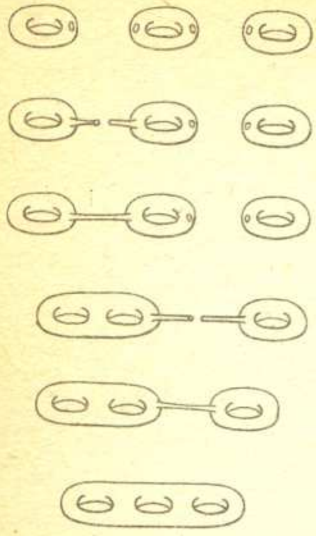
Butelka Kleina

Torus i sfery z trzema uszkami

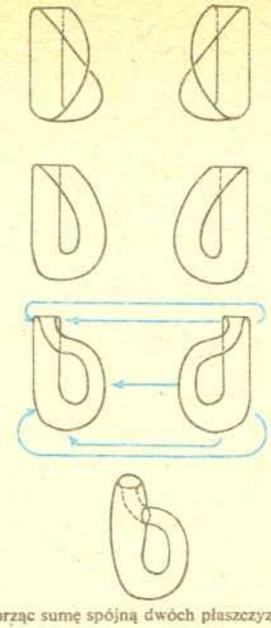
Podane przykłady to wszystkie 2-rozmaitości orientowalne. Z kolei wszystkie nieorientowalne 2-rozmaitości to płaszczyzna rzutowa RP^2, butelka Kleina (nieorientowalny torus — można go umieścić w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej tylko z samoprzecięciem) oraz powierzchnie uzyskane z tych dwóch przez doklejenie pewnej liczby uszek.

Powierzchnia nieorientowalna to taka, która (mówiąc potocznie) ma tylko jedną stronę: wędrując po niej można znaleźć się w tym samym punkcie ,,do góry nogami". Wstęga Möbiusa jest jednostronna, jest dwuwymiarową rozmaitością, ale ma brzeg. W przestrzeni trójwymiarowej nie mieści się żadna nieorientowalna 2-rozmaitość (zwarta, bez brzegu).

3-rozmaitości nie dają się tak łatwo sklasyfikować i ,,prawie do teraz" nie można było nawet oczekiwać, że będzie to wykonalne w podobny jak dla powierzchni sposób. ,,Prawie do teraz" znaczy do najnowszych badań W. Thurstona.



Suma spójna trzech torusów



Tworząc sumę spójną dwóch płaszczyzn rzutowych korzystamy z faktu, że płaszczyzna rzutowa z wyciętym kołem jest wstęgą Möbiusa (dowód np. w *Delcie* 5/1982).

Haken jest powszechnie znany jako współautor dowodu twierdzenia o czterech barwach, mówiącego, że każdą mapę można pomalować czterema kolorami tak, by sąsiednie państwa miały różną barwę.

Oczywiście chodzi o koła (kule) w sensie określonej na rozmaitości metryki. Łatwo zauważyć, że koła na płaszczyźnie i walcu są do pewnego promienia (jakiego?) izometryczne, a powyżej — nie; płaszczyzna i walec mają więc ten sam typ geometryczny.

Strukturę geometryczną rozmaitości określa się nie tylko dla rozmaitości zwartych. Na rozmaitości niezwartej można jednak znaleźć więcej niż jedną strukturę geometryczną (np. na płaszczyźnie, na walcu).

W. Thurston urodził się 30 października 1946 r. w Waszyngtonie. Doktorat uzyskał w 1972 r. na Uniwersytecie w Berkeley, a obecnie pracuje na Uniwersytecie w Princeton.

Powróćmy do powierzchni. Jeśli przyjrzeć się im uważnie, to można zauważyć, że (poza S^2) dadzą się one uzyskać z T^2 (orientowalne) i RP^2 (nieorientowalne) za pomocą operacji nazywanej sumą spójną i oznaczanej $\#$. Sumę spójną dwóch powierzchni tworzymy w następujący sposób: wycinamy w każdej z nich koło (i wyrzucamy te koła), a następnie sklejamy brzeg jednej dziury z brzegiem drugiej. Łatwo zauważyć, że suma spójna jakiejś powierzchni M^2 i T^2 to M^2 z dodatkowym uszkiem. Trudniej, że $RP^2 \# RP^2$ to butelka Kleina. Jeszcze trudniej udowodnić, że

Każda powierzchnia orientowalna to sfera lub suma spójna pewnej liczby torusów, a każda nieorientowalna to suma spójna pewnej liczby płaszczyzn rzutowych; S^2, T^2 i RP^2 nie rozkładają się już na sumę spójną innych powierzchni, a powyższy rozkład pozostałych powierzchni jest jednoznaczny.

Sumę spójną można analogicznie określić dla rozmaitości wyższych wymiarów. Można też dowodzić analogicznych twierdzeń. Kneser, Haken i Milnor wykazali, że 3-rozmaitości rozkładają się jednoznacznie na sumę spójną nierozkładalnych 3-rozmaitości. Jednak te nierozkładalne „kawałki" okazują się dużo bardziej skomplikowane niż T^2 i RP^2.

Ponieważ wiadomo było, że dla 4-rozmaitości klasyfikacja tego typu co dla powierzchni jest niemożliwa, więc sądzono, że i dla 3-rozmaitości prostej klasyfikacji nie będzie. Sądzono jednak mylnie.

Zanim przedstawimy rezultaty Thurstona, przyjrzyjmy się jeszcze raz powierzchniom. Tym razem zajmiemy się ich strukturą geometryczną. Mówimy, że na rozmaitości jest określona struktura geometryczna, jeśli można na niej określić jednorodną metrykę (taki sposób mierzenia odległości, że narysowane na rozmaitości dwa koła (kule) o takich samych promieniach są izometryczne). Jeśli dwie rozmaitości mają struktury geometryczne takie, że koła (kule) o równych promieniach nie przekraczających pewnej liczby r są na nich obu izometryczne, to mówimy, że są lokalnie izometryczne i mają ten sam typ geometryczny. Dla 2-rozmaitości możliwe są trzy typy: powierzchnie eliptyczne (zwane też sferycznymi), paraboliczne (euklidesowe) i hiperboliczne (Bolyai-Łobaczewskiego). Oznacza to, że są one lokalnie izometryczne odpowiednio ze sferą (S^2), płaszczyzną euklidesową (E^2) i płaszczyzną hiperboliczną (H^2). Zachodzi przy tym twierdzenie:

Spośród 2-rozmaitości S^2 i RP^2 mają strukturę eliptyczną, T^2 i butelka Kleina — paraboliczną, a pozostałe hiperboliczną.

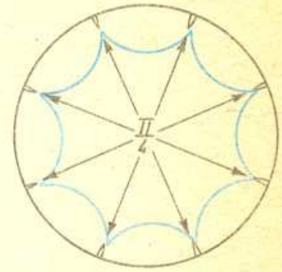
Stwierdza się to przez wskazanie takich izometrii wzorcowej struktury (a więc S^2, E^2 lub H^2), żeby po sklejeniu (wszystkich) odpowiadających sobie w tych izometriach punktów powstała dana 2-rozmaitość.

Jak widać większość 2-rozmaitości (nieskończenie wiele) ma strukturę hiperboliczną (innych jest tylko cztery). Aż do badań Thurstona przypuszczenie, że podobnie jest dla 3-rozmaitości, wydawało się bezpodstawne. Thurston badając (również za pomocą komputera) wiele przykładów 3-rozmaitości doszedł do wniosku, że musi istnieć jakaś analogia między klasyfikacją 2- i 3-rozmaitości. Trzeba tylko rozbić 3-rozmaitości na

Aby uzyskać eliptyczną strukturę geometryczną płaszczyzny rzutowej, należy użyć symetrii względem środka sfery (porównaj *Delta* 5/1982 i 12/1981).

Strukturę paraboliczną torusa uzyskamy sklejając punkty odpowiadające sobie przy przesunięciach postaci $k \cdot v + l \cdot w$ (gdzie v i w to nierównoległe wektory). Polega to na zwinięciu płaszczyzny E^2 w rurkę tak, by pionowe kreski nałożyły się, a potem zwinięciu tej rurki (wąż połykający swój ogon), tak, by nałożyły się jej równoleżniki.

Podobnie (przez zwijanie płaszczyzny H^2) uzyskamy hiperboliczną strukturę sfery z dwiema rączkami, jeśli „kratka", której odpowiednie linie mają się nakładać, będzie miała „oczka" w kształcie ośmiokąta o kątach równych $\pi/4$. Można taki ośmiokąt wygodnie obejrzeć w modelu Poincarégo w kole. W tym modelu H^2 (porównaj *Delta* 12/1981) proste są łukami okręgów prostopadłych do brzegu modelu. Pojedyncze narysowane oczko można powielić pamiętając, że symetrie w rozważanym modelu to inwersje (więcej o nich w *Delcie* 10/1983).



„kawałki" mniej skomplikowane niż to gwarantuje rozkład na sumę spójną.

Tworząc sumę spójną dwóch powierzchni sklejaliśmy je wzdłuż okręgu (S^1). Analogicznie 3-rozmaitości skleja się wzdłuż sfer (S^2). Zauważmy, że suma spójna powierzchni to ich sklejenie wzdłuż jedynej możliwej 1-rozmaitości. Przy sklejaniu 3-rozmaitości korzystać możemy nie tylko z S^2, ale i innych 2-rozmaitości W 1977 r. amerykańscy matematycy W. Jaco i i P. Shalen oraz niezależnie Niemiec K. Johannson znaleźli rozkład 3-rozmaitości wzdłuż torusów (T^2). Co więcej, udowodnili, że rozkład 3-rozmaitości wzdłuż torusów nieściśnialnych jest jednoznaczny.

Thurston wysunął następującą hipotezę:

Jeśli 3-rozmaitości rozłożymy wzdłuż sfer i nieściśnialnych torusów, to otrzymane kawałki mają strukturę geometryczną.

Podobnie jak 2-rozmaitości, owe kawałki mogą mieć strukturę eliptyczną (ze sklejania S^3), paraboliczną (ze sklejania E^3), hiperboliczną (ze sklejania H^3). Thurston wykazał, że w wymiarze 3 jest osiem istotnie różnych struktur geometrycznych, a struktura hiperboliczna jest najważniejsza.

Hipoteza Thurstona zawiera w sobie liczącą już 80 lat i ciągle nie dowiedzioną hipotezę Poincarégo:

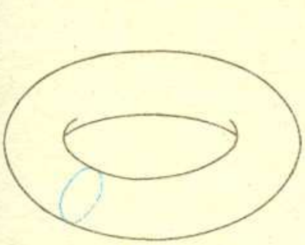
Jeżeli w 3-rozmaitości każda pętla jest ściągalna do punktu, to rozmaitość ta jest homeomorficzna z S^3.

Thurston wykazał słuszność swojej hipotezy w wielu istotnych przypadkach, na przykład jeśli rozmaitość M^3 zawiera powierzchnię nieściśnialną różną od S^2. Ten fragment hipotezy nazywany bywa Twierdzeniem Monstrum i jego dowodu prawie nikt do końca nie rozumie.

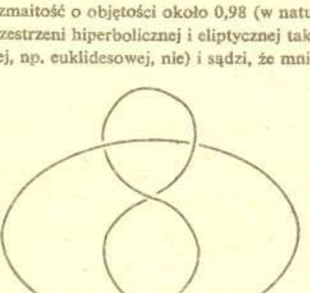
W styczniu 1982 r. Thurston ogłosił, że potrafi udowodnić swoją hipotezę dla następnej dużej klasy 3-rozmaitości — dla tych, które mają pewne specjalne symetrie. Do pełnego dowodu hipotezy wiele jednak jeszcze brakuje.

Powierzchnia M^2 jest nieściśnialna w M^3, gdy każda pętla nie dająca się ściągnąć do punktu w M^2 nie da się też ściągnąć do punktu w M^3.

Nieściągalna pętla na torusie



Rozmaitość hiperboliczna ma objętość. Okazuje się ona użytecznym niezmiennikiem przy próbach klasyfikacji 3-rozmaitości. Thurston i Jorgensen (duński matematyk pracujący w USA) wykazali, że objętości 3-rozmaitości tworzą dobrze uporządkowany podzbiór liczb rzeczywistych dodatnich. W szczególności istnieje rozmaitość o najmniejszej objętości. Thurston skonstruował rozmaitość o objętości około 0,98 (w naturalnej jednostce długości — w przestrzeni hiperbolicznej i eliptycznej taka jednostka istnieje, a w parabolicznej, np. euklidesowej, nie) i sądzi, że mniejszej objętości uzyskać



się nie da. Dowodu na to jednak nie ma. Pozostaje też pytanie, jaka jest rozmaitość o drugiej, trzeciej itd. objętości. Przykład Thurstona otrzymuje się z węzła ósemkowego (przedstawionego na rysunku) przez wycięcie jego otoczenia i wklejenie go z powrotem, ale w inny sposób.