Masa Chandrasekhara

Doc. dr Paweł HAENSEL

Współlaureatami ubiegłorocznej nagrody Nobla z fizyki zostali astrofizycy amerykańscy: Subrahmanyan Chandrasekhar z Uniwersytetu w Chicago i William A. Fowler z Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego w Pasadenie. Celem tego artykułu jest przedstawienie największego odkrycia jednego z ubiegłorocznych noblistów — S. Chandrasekhara.

S. Chandrasekhar urodził się 9 października 1910 roku w Lahore, na terenie ówczesnych Indii (obecnie Pakistan). Po skończeniu studiów na Uniwersytecie w Madrasie w Indiach przybył w 1930 roku do Cambridge w Anglii, gdzie rozpoczął pracę pod kierunkiem wybitnego angielskiego fizyka teoretyka, Ralpha H. Fowlera (nie należy go mylić z ubiegłorocznym noblistą, W. A. Fowlerem). Największego odkrycia dokonał Chandrasekhar w 1930 roku, a więc mając zaledwie 20 lat. Na podstawie rozważań teoretycznych stwierdził on istnienie maksymalnej masy — granicznej masy Chandrasekhara — dla białych karłów.

W latach dwudziestych znano trzy niezwykłe gwiazdy — białe karły. Najlepiej znanym białym karłem był Syriusz B, tworzący układ podwójny z najjaśniejszą gwiazdą na niebie — Syriuszem. Obserwacje Syriusza B doprowadziły do wniosku, że ma on masę zbliżoną do masy Słońca i zadziwiająco mały promień — zaledwie 5 600 km (mniejszy od promienia Ziemi!). Oznaczało to, że średnia gęstość Syriusza B

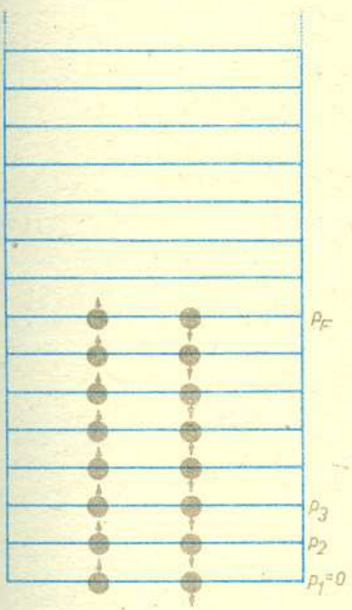
$$\bar{\varrho} = M/\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{1}$$

wynosi około 3 tony na cm^3! Jak zauważył w 1926 roku późniejszy promotor pracy doktorskiej Chandrasekhara, R. H. Fowler, materia o tak ogromnej gęstości powinna być całkowicie zjonizowana. Będzie ona mieszaniną jąder atomowych i gazu elektronów.

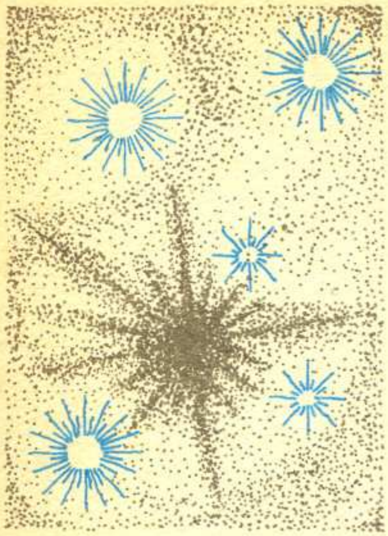
Ciśnienie tak gęstej materii jest wytwarzane przez lekkie i ruchliwe elektrony, sam zaś gaz elektronowy można traktować jako doskonały gaz fermionów (cząstek o spinie 1/2). W temperaturze zera bezwzględnego gaz elektronowy znajdowałby się w stanie podstawowym (o najniższej możliwej energii). Zgodnie z zasadą Pauliego elektrony zajmują wówczas stany pędowe tak, jak to jest schematycznie pokazane na rys. 1. W stanie podstawowym maksymalny pęd elektronu wynosi więc p_F; nosi on nazwę pędu Fermiego. Wszystkie stany pędowe z $p_i > p_F$ są puste, zaś stany z $p_i \leqslant p_F$ są obsadzone. Pęd Fermiego jest związany z gęstością elektronów ϱ_e = (liczba elektronów w cm^3) × (masa spoczynkowa elektronu) zależnością $p_F = a\varrho_e^{1/3}$, gdzie a jest stałą wyliczoną teoretycznie. Maksymalna energia kinetyczna elektronu, a więc energia elektronu o pędzie p_F, to tzw. energia Fermiego, E_F. Temperaturę Fermiego, T_F, definiujemy jako E_F/k_B, gdzie k_B jest stałą Boltzmanna. Jeżeli gaz ma temperaturę $T > 0$ K, ale temperatura ta jest znacznie mniejsza od temperatury Fermiego T_F, to mówimy, że jest on zdegenerowany. Oznacza to, że wszelkie poprawki do wielkości termodynamicznych obliczonych przy założeniu $T = 0$ K, a wynikające z faktu, że gaz ma niezerową temperaturę, są zaniedbywalne. W typowym dla białego karła przypadku (całkowicie zjonizowany ^{4}He, ^{12}C, ^{16}O) jeden elektron przypada na dwa nukleony i wobec tego, że elektron jest 1836 razy lżejszy od nukleonów, związek gęstości gazu elektronowego z gęstością materii ϱ jest postaci

$$\varrho_e = \frac{\varrho}{2 \cdot 1836}. \tag{2}$$

Jeżeli $\varrho = 3 \cdot 10^6$g cm^{-3}, to nawet przy temperaturach kilku milionów stopni, charakterystycznych dla centralnej części białego karła, gaz elektronowy będzie zdegenerowany ($T_F \approx 10^{10}$ K $\gg T$).



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie obsadzenia stanów pędowych w gazie fermionów o spinie 1/2, przy $T = 0$ K.



W swojej pracy z 1926 roku Fowler używał nierelatywistycznego wzoru na energię kinetyczną elektronów,

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}, \tag{3}$$

a więc zakładał, że prędkości elektronów są znacznie mniejsze od prędkości światła c ($p_F/m \ll c$). Równanie stanu dla nierelatywistycznego zdegenerowanego gazu elektronowego miało postać

$$P = b_1 \varrho_e^{5/3} \tag{4}$$

tak, że wyprowadzone przez Fowlera równanie stanu dla materii we wnętrzu białego karła było postaci

$$P = K_1 \varrho^{5/3}, \tag{5}$$

gdzie K_1 było wyliczone teoretycznie. Chandrasekhar zauważył, że w przypadku, gdy gęstość gazu elektronowego będzie dostatecznie duża, prędkość najszybszych elektronów (tych o pędzie p_F, dla których prędkość jest proporcjonalna do $\varrho^{1/3}$) może stać się zbyt duża na to, aby przybliżenie nierelatywistyczne było stosowalne. Przecież dla $\varrho > 1$ t/cm³ prędkość wyliczona z nierelatywistycznego wzoru p_F/m jest większa od c! Jest jasne, że dla tak wielkich gęstości trzeba używać ogólnego wzoru na energię kinetyczną, który daje szczególna teoria względności,

$$E_{kin} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2. \tag{6}$$

Używając tego wzoru na energię kinetyczną elektronów Chandrasekhar wyprowadził następnie poprawne równanie stanu postaci

$$P = K_2 f(\varrho), \tag{7}$$

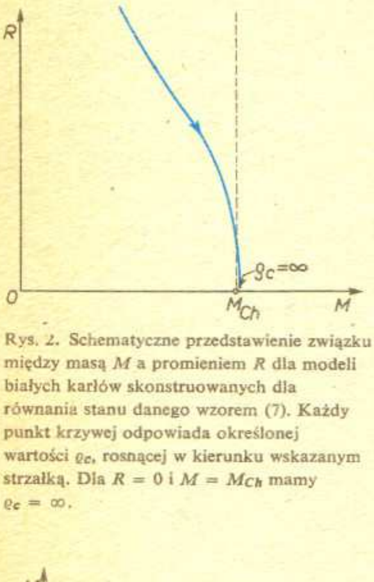
gdzie f to dość skomplikowana funkcja ϱ. Stosując swoje równanie stanu rozwiązał on następnie równanie równowagi hydrostatycznej dla modeli białego karła o różnych wartościach gęstości w centrum gwiazdy, ϱ_c. Dla każdej wartości ϱ_c obliczył on masę gwiazdy M oraz jej promień R. Wyniki jego obliczeń, przedstawione schematycznie na rys. 2 i 3, wykazywały zdumiewającą własność: coraz gęstsze białe karły były jednocześnie coraz mniejsze (rys. 1), tak, że masa ich rosła coraz wolniej (rys. 2). Masa ta zdążała asymptotycznie do pewnej granicznej wartości, którą nazywamy obecnie masą Chandrasekhara, M_{Ch}. Wartość M_{Ch} możemy wyliczyć zakładając, że $E_F \gg mc^2$, a więc $\varrho_c \to \infty$. Dla takiego ultrarelatywistycznego (energia spoczynkowa pomijalna w porównaniu z energią kinetyczną) zdegenerowanego gazu elektronowego funkcja f w równaniu (7) przybiera prostą postać $f = \varrho^{4/3}$ tak, że

$$P = K_2 \varrho^{4/3}, \tag{8}$$

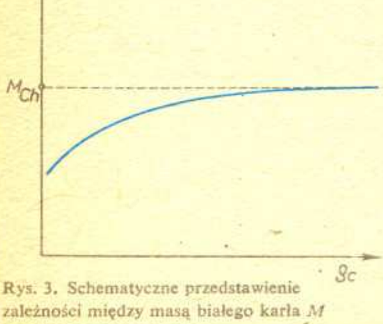
gdzie stała K_2 może być wyliczona teoretycznie. Z rozwiniętej na początku naszego wieku teorii gwiazd politropowych opisywanych równaniami stanu o postaci $P = K\varrho^{1+\frac{1}{n}}$, gdzie n jest liczbą naturalną, wiadomo, że dla $n = 3$ każdemu promieniowi gwiazdy odpowiada jedna, niezmienna masa zależna tylko od współczynnika K. Chandrasekhar wykazał, że ultrarelatywistyczny gaz elektronowy prowadzi do politropowego równania stanu z $n = 3$. Kreskowanym asymptotom na rys. 2 i 3 odpowiadają więc gwiazdy politropowe z $n = 3$ i $K = K_2$. Korzystając z tego wyniku teorii gwiazd politropowych otrzymujemy $M_{Ch} = 1{,}44$ masy Słońca. Białe karły o masie większej od M_{Ch} nie mogą istnieć!

Żeby docenić wagę odkrycia Chandrasekhara, należy zastanowić się nad konsekwencjami istnienia granicznej masy M_{Ch} dla końcowych etapów ewolucji gwiazd. Jaki będzie los gwiazdy po całkowitym wypaleniu „paliwa" jądrowego? Jeżeli masa jej gęstego jądra zbudowanego z produktów syntezy jądrowej będzie mniejsza od M_{Ch}, to niewątpliwie zmieni się ona w białego karła. Od momentu bowiem, w którym materia we wnętrzu kurczącego się jądra gwiazdy stanie się zdegenerowana (a więc gdy $T \ll T_F$), ciśnienie w nim będzie zależało tylko od gęstości. Ostateczną postacią gwiazdy po „rozpłynięciu" się otoczki będzie konfiguracja w postaci kuli zdegenerowanej materii, ponieważ dalsze stygnięcie gwiazdy nie będzie mogło zmienić ciśnienia w jej wnętrzu. Jedynym obserwowalnym efektem stygnięcia będzie zmniejszanie jasności gwiazdy: biały karzeł stanie się w końcu karłem czarnym.

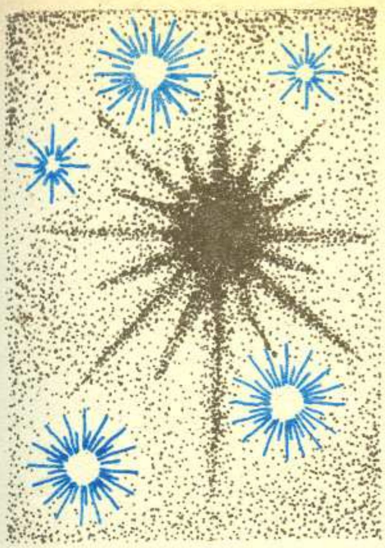
Jeśli wprowadzić parametr $x = \frac{p_F}{mc}$, to gęstość w tym przypadku dana jest wzorem $\varrho = B \cdot x^3$, a ciśnienie
$P = A \cdot [x(2x^2 - 3)(x^2+1)^{1/2} + 3 \operatorname{arsinh} x]$.



Rys. 2. Schematyczne przedstawienie związku między masą M a promieniem R dla modeli białych karłów skonstruowanych dla równania stanu danego wzorem (7). Każdy punkt krzywej odpowiada określonej wartości ϱ_c, rosnącej w kierunku wskazanym strzałką. Dla $R = 0$ i $M = M_{Ch}$ mamy $\varrho_c = \infty$.



Rys. 3. Schematyczne przedstawienie zależności między masą białego karła M a gęstością w jego środku ϱ_c.



Treść wykładów wygłaszanych przez laureatów w czasie ceremonii wręczania nagród publikują co roku „Postępy Fizyki".

Jaki los spotka gwiazdę, której zdegenerowane jądro ma masę większa od M_{Ch}? Dokładne zrozumienie kolei losu takiej masywnej gwiazdy to wynik badań przeprowadzonych wiele lat po odkryciu masy Chandrasekhara. Ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego w jej wnętrzu nie zdoła zrównoważyć siły grawitacji. W wyniku implozji zdegenerowanego jądra gwiazdy nastąpi wyzwolenie ogromnych ilości energii i odrzucenie warstw zewnętrznych. Cały proces ma charakter gigantycznego wybuchu, który może być widoczny na Ziemi jako supernowa. Kurczące się „jądro" supernowej może stać się gwiazdą neutronową o fantastycznej gęstości ponad 10^8 t/ cm^3 i promieniu 10—20 km bądź skurczyć się do osobliwej postaci czarnej dziury. Gwiazda neutronowa może być końcowym, ostatecznym stadium życia gwiazdy dzięki temu, że siły ciśnienia supergęstej materii jądrowej są w stanie zrównoważyć siły grawitacji — ale tylko wtedy, gdy „jądro" powstałe w wyniku implozji ma masę mniejszą od dwóch mas Słońca. W przeciwnym przypadku gigantyczne siły przyciągania grawitacyjnego doprowadzą nieuchronnie do powstania czarnej dziury.

W 1935 roku Chandrasekhar opuścił Cambridge i przeniósł się na Uniwersytet w Chicago w Stanach Zjednoczonych. Jest profesorem tego uniwersytetu do chwili obecnej. W ciągu ponad pół wieku swojej działalności naukowej zgromadził ogromny dorobek naukowy w wielu dziedzinach astrofizyki teoretycznej. Swojego największego odkrycia dokonał jednak wtedy, gdy mając dwadzieścia lat wykazał, że prawa fizyki kwantowej mogą decydować o losie gwiazd.

Do zrozumienia istnienia granicznej masy M_{Ch} można dojść dzięki pewnym prostym oszacowaniom.

Rozważmy zależność masy i promienia białego karła od tych wielkości fizycznych, które są podstawowe dla zachowania równowagi hydrostatycznej. Równowaga ta oznacza, że w każdej chwili i w każdej jednostce objętości siły parcia równoważą siłę grawitacyjną we wnętrzu gwiazdy.

Zaniedbajmy w tej jakościowej dyskusji zmiany struktury wewnętrznej, interesować nas będą wyłącznie zmiany globalne.

Średnia gęstość we wnętrzu gwiazdy ϱ jest proporcjonalna do $\frac{M}{R^3}$, a siła grawitacji działająca na warstwę przy jej powierzchni jest $F_g \sim M^2/R^5$. Siła ta ma być zrównoważona przez działające w przeciwnym kierunku ciśnienie. W przypadku nierelatywistycznym (równanie 5) jest $P \sim \varrho^{5/3} \sim \frac{M^{5/3}}{R^5}$, a więc siła pochodząca od ciśnienia wynosi $F_c = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} \sim \frac{M^{5/3}}{R^6}$. Dla danej masy gwiazdy M równowaga zostaje osiągnięta przy pewnej określonej wartości promienia R, ponieważ rozważane przez nas siły zależą od R w różnych potęgach.

Dziwna zależność promienia od masy również wynika z faktu, że siła grawitacji ($F_g \sim M^2$) rośnie szybciej przy zwiększaniu masy niż siła pochodząca od ciśnienia ($F_c \sim M^{5/3}$).

Rozważając białe karły o dostatecznie dużych masach stwierdzamy, że siła pochodząca od ciśnienia ulega modyfikacji (gaz jest relatywistyczny, równanie (8)) i staje się proporcjonalna do $M^{4/3}/R^5$. Jeśli teraz porównamy ją z siłą grawitacji, to okaże się, że zależą one od promienia gwiazdy R w jednakowych potęgach, a więc gwiazda nie może osiągnąć równowagi przez proste dopasowanie promienia: to nic nie da. Równowaga może być osiągnięta jedynie dla konkretnej wartości masy M_{Ch}, dla której $F_g = F_c$. Dla masy większej niż owa wartość graniczna siła grawitacji będzie zawsze większa od siły pochodzącej od ciśnienia. W sytuacji, gdy masa gwiazdy jest mniejsza od M_{Ch}, siła grawitacji będzie mniejsza od siły ciśnieniowej, gwiazda zacznie zwiększać swoje rozmiary (w wyniku braku równowagi), degeneracja zmieni się (przynajmniej w zewnętrznych częściach gwiazdy) z relatywistycznej na nierelatywistyczną, wracamy więc do przypadku poprzedniego, w którym równowaga może być osiągnięta przez dostosowanie promienia.

Rozwiązanie zadania M 363. Rozpocznijmy od dowolnego rozmieszczenia gości przy stole i przypuśćmy, że osoba A i jej wróg B siedzą obok siebie. (B po prawej stronie A). Wykażemy, że znajdzie się para A', B', siedzących obok siebie osób takich, że A' nie jest wrogiem A, B' nie jest wrogiem B i B' siedzi po prawej stronie A'. Istotnie: A ma co najmniej n „nie-wrogów" $A_1, \ldots, A_n$. Oznaczamy przez B_i osobę siedzącą po prawej stronie A_i. Oczywiście $B_i \neq B_j$, gdy $i \neq j$ i ponieważ B ma najwyżej n-1 wrogów, co najmniej jedna z osób B_i nie jest jego wrogiem. Szukaną parą jest więc para A_i, B_i. Przesadźmy teraz osoby siedzące w prawo od A i w lewo od B (będą to $B, C_1, \ldots, C_k, A'$) w odwrotnym porządku $A', C_k, \ldots, C_1, B$ i zauważmy, że jedynymi zmianami sąsiedztw będą (AB) i $(A'B')$ na (AA') i (BB'):
$(\ldots ABC_1 \ldots C_k A' B' \ldots \to \ldots AA'C_k \ldots$
$\ldots C_1BB')$ i liczba „wrogich" sąsiedztw zmaleje co najmniej o 1. Postępując analogicznie dalej po najwyżej $2n$ krokach otrzymamy żądane rozmieszczenie.