Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 11/1983

Marek Prauza	- Poraj	46,02pkt
Małgorzata Czerniakowska	-Gdańsk	43,88pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	42,55pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	36,74pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	36,56pkt
Jacek Uryga	- Bytom	36,02pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	34,23pkt
Wojciech Olszewski	- Brwinów	32,90pkt

Współczynniki trudności zadań:
67 - 2,53   68 - 1,34   69 - 2,81

Pan Marek Prauza jest czternastym członkiem "Klubu 44".

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyk i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 85, 86, 87

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1984

85. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m, dla których odpowiedź na następujące pytanie jest jednoznaczna: Ile prostych poprowadzono na płaszczyźnie, jeśli wiadomo, że zbiór wszystkich punktów przecięcia tych prostych składa się z m punktów?

86. Obliczyć objętość największego czworościanu, który można umieścić w dwunastościanie foremnym o danej krawędzi a.

87. a) Czy prawdą jest, że jeśli $f\colon \langle 0,\infty) \to R$ jest dowolną funkcją taką, że dla każdej liczby $a \in \langle 0,1)$ istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(a+n)$ i jej wartość nie zależy od wyboru a, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

b) Czy odpowiedź na pytanie a) zmieni się, jeśli dodatkowo założyć, że funkcja f jest ciągła?

Zadanie 87 przysłał pan Marek Gałecki z Milanówka.

Rozwiązania zadań z numeru 1/1984

Przypominamy treść zadań:

73. Dane są liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$. Niech $s = x_1 + \ldots + x_n$, $s_k = s - x_k$. Dowieść, że $s_1^{-1} + \ldots + s_n^{-1} > (n+1)s^{-1}$.

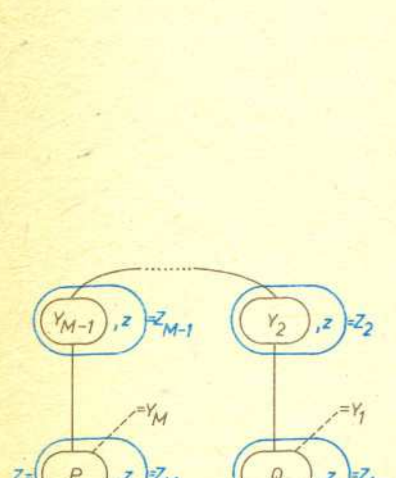
74. Z talii 52 kart wybrano 13 kart. Niech $N = \binom{52}{13}$. Czy jest możliwe N-krotne wykonanie operacji zastąpienia jednej z 13 kart jedną z pozostałych 39 kart tak, by po N ruchach wrócić do konfiguracji wyjściowej i żeby żaden otrzymany po drodze zestaw 13-kartowy nie powtórzył się?

75. W 1984 punktach sfery o promieniu R umieszczono równe masy tak, że środek masy otrzymanego układu pokrywa się ze środkiem sfery. Obliczyć sumę kwadratów wzajemnych odległości tych punktów.

73. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną mamy $g = \left(\prod s_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum s_k = \frac{n-1}{n}s$ oraz $g^{-1} = \left(\prod s_k^{-1}\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum s_k^{-1}$. Stąd $\sum s_k^{-1} \geqslant ng^{-1} \geqslant n\cdot\frac{n}{n-1}s^{-1} > (n+1)s^{-1}$.

74. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnimy twierdzenie: Dla każdej liczby $k \leqslant n$ istnieje ustawienie wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego w ciąg $X_1, \ldots, X_N$ $\left(\text{gdzie } N = \binom{n}{k}\right)$, w którym każde dwa sąsiednie zbiory, a także ostatni z pierwszym, mają dokładnie $k-1$ elementów wspólnych; przy tym można żądać, by X_1 i X_N były z góry zadanymi podzbiorami (o $k-1$ wspólnych elementach). Dla $n = 52$, $k = 13$ dostajemy stąd twierdzącą odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu.

Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1, 2, 3$ teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy prawdziwość twierdzenia dla pewnego $n \geqslant 3$ i niech E będzie zbiorem $(n+1)$-elementowym. Ustalmy k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$ (gdy $k = 1$ lub $k = n$ lub $k = n+1$, dowód jest banalny) i niech A, Z będą k-elementowymi podzbiorami E takimi, że $P = A \cap Z$ jest zbiorem $(k-1)$-elementowym. Tak więc $A = P \cup \{a\}$, $Z = P \cup \{z\}$, $a \neq z$. Usuńmy ze zbioru P pewien (dowolnie wybrany) element p i zastąpmy go przez dowolny element q spoza P, różny od a i od z (zbiór $E-P$ ma $(n+1)-(k-1) \geqslant 3$ elementów, więc takie q istnieje); otrzymany zbiór oznaczmy przez Q. Zbiory P i Q mają $k-2$ elementów wspólnych i nie zawierają elementów a i z.



Weźmy pod uwagę n-elementowy zbiór $E-\{z\}$. Z założenia indukcyjnego można ustawić wszystkie k-elementowe podzbiory tego zbioru w ciąg $X_1, \ldots, X_N$ spełniający warunki twierdzenia, a także można ustawić wszystkie jego $(k-1)$-elementowe podzbiory w podobny ciąg $Y_1, \ldots, Y_M$ $\left(\text{tu } N = \binom{n}{k},\ M = \binom{n}{k-1}\right)$, żądając przy tym, by $X_1 = P \cup \{a\}$, $X_N = Q \cup \{a\}$,

$Y_1 = Q$, $Y_M = P$. Niech $Z_i = Y_i \cup \{z\}$. Ciąg zbiorów $X_1, \ldots, X_N, Z_1, \ldots, Z_M$ zawiera wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru E; każde dwa sąsiednie mają $k-1$ elementów wspólnych, ponadto $X_1 = A$, $Z_M = Z$ są zadanymi na początku zbiorami (rysunek). Kończy to dowód indukcyjny.

75. Oznaczmy: O — środek kuli, $A_1; \ldots, A_m$ — wybrane punkty sfery ($m = 1984$). O jest środkiem ciężkości układu $A_1, \ldots, A_m$, więc $\sum_i \overrightarrow{OA_i} = O$. Szukana wartość równa się

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} |A_iA_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\overrightarrow{A_iA_j})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\overrightarrow{OA_j}-\overrightarrow{OA_i})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (R^2-2\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}+R^2) =$$
$$= \sum_{i,j} (R^2-\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}) = m^2R^2-\sum_i\sum_j \overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} = m^2R^2-\Big(\sum_i \overrightarrow{OA_i}\Big)\Big(\sum_j \overrightarrow{OA_j}\Big) = m^2R^2.$$

Mizar MSE (9)

Zbliżamy się do końca naszego kursu. Poznaliśmy już wszystkie konstrukcje językowe w Mizarze MSE. Dzisiaj pokażemy pewne techniki dowodzenia stosowane w przypadku występowania zdań alternatywnych. Zrobimy to na przykładach, które wcześniej rozwiązywaliśmy inaczej.

W przypadku, gdy chcemy dowodzić implikacji, której następnikiem jest zdanie alternatywne, możemy — i to jest wygodne — zastosować dowód nie wprost. Tak zrobiliśmy w odcinku 4. Możemy również postąpić nieco inaczej. Kiedy bowiem alternatywa jest prawdziwa? Wtedy, gdy co najmniej jeden z jej składników jest prawdziwy. Zatem jeżeli w trakcie dowodu założymy, że jeden ze składników dowodzonej alternatywy jest fałszywy i wykażemy, że drugi wtedy jest prawdziwy, to uważamy alternatywę za dowiedzioną. Weźmy przykład (por. odcinek 4)

```
FOR X,Y,Z ST NW[X,Y] HOLDS NW[Z,Y] OR NW[X,Z]
 PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT A: NW[X,Y];
  ASSUME NOT NW[Z,Y];
   THEN NW[Y,Z] BY SPOJNOSC;
  HENCE NW[X,Z] BY PRZECHODNIOSC,A
 END;
```

O tym, jak korzystamy z faktu wyrażonego za pomocą alternatywy, wspominaliśmy już w odcinku 7. Jeżeli pewna teza wynika tak z jednego, jak i z drugiego członu pewnej (uzyskanej bądź założonej) alternatywy, to uważamy tę tezę za prawdziwą. Takie rozumowanie nazywamy dylematem. Alternatywa mówiąca, że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe jest aksjomatem klasycznego rachunku logicznego. Prawo to nazywają prawem wyłączonego środka — trzeciego wyjścia nie ma, stąd łacińskie *tertium non datur*.

Pokażemy teraz, jak dla przykładu z odcinka 4 zbudować dowód wprost, korzystając z prawa wyłączonego środka. Musimy się zgodzić, że każde dwie nazwy (np. nazwy zmiennych) albo odnoszą się do tego samego przedmiotu, albo do dwu różnych — innej możliwości nie ma.

```
FOR X,Y,Z ST NW[X,Y] & X<>Y & NW[Z,X] HOLDS NOT NW[Y,Z]
 PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
   A: NW[X,Y]  AND  B: X<>Y  AND  C: NW[Z,X];
  D: NOW ASSUME D': Z=X;
      NOT NW[Y,X] BY A,B,ANTYSYMETRIA;
     HENCE NOT NW[Y,Z] BY D'
    END;
  E: NOW ASSUME E': Z<>X;
      THEN NOT NW[X,Z] BY C,ANTYSYMETRIA;
      THEN E'': Z<>Y BY A;
      NW[Z,Y] BY A,C,PRZECHODNIOSC;
     HENCE NOT NW[Y,Z] BY E'',ANTYSYMETRIA
    END;
  THUS THESIS BY D,E
 END;
```

Powyższy dowód można znacznie skrócić. Checker Mizara MSE akceptuje również taki dowód wprost powyższego zdania:

```
FOR X,Y,Z ST NW[X,Y] & X<>Y & NW[Z,X] HOLDS NOT NW[Y,Z]
 PROOF
  LET X,Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT
   A: NW[X,Y]  AND  B: X<>Y  AND  C: NW[Z,X];
   NOT NW[Y,X] BY A,B,ANTYSYMETRIA;
   HENCE NOT NW[Y,Z] BY C,PRZECHODNIOSC
 END;
```

Następny (tj. ostatni) odcinek poświęcimy zadaniom z zupełnie innej dziedziny niż nasze nieograniczenie, gęsto i liniowo uporządkowane ułamki. Ale to za miesiąc.

Dzisiaj jeszcze czujemy się w obowiązku podać pewną charakterystykę modułu sprawdzającego Mizara MSE (checkera). Wejście w techniczne szczegóły opisujące, jak odbywa się samo sprawdzanie w maszynie wymagałoby pewnie odrębnego kursu. Stąd podamy te wiadomości o checkerze, których można było i tak się domyślić oglądając dotychczasowe przykłady. A więc:

1. Każda tautologia rachunku zdań (jeśli jej maszynowy zapis zmieści się w komputerze) jest akceptowana przez checker bez dodatkowego uzasadnienia, a każde zdanie nie będące tautologią nie jest przez checker akceptowane. Każde zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora wymaga uzasadnienia.

2. Sprawdzając wynikanie wniosku z przesłanek checker uwzględnia jedynie te, które wymieniono po **by** oraz pochodzące z zahaczenia (**then**, **hence**).

3. Relacja równości (=) jest przez checker automatycznie traktowana jako relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia.

4. Spójnik zdaniowy „równoważność" jest przez checker traktowany jako koniunkcja dwu implikacji.

5. Checker (na ogół) nie akceptuje wnioskowań, jeśli wśród przesłanek znajduje się więcej niż jedno zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego.

6. Następujące dwie reguły wnioskowania klasycznego rachunku logicznego checker stosuje nieproszony:
a — prawo abstrahowania od konkretności,
b — prawo przechodzenia od ogólnego do szczególnego przypadku.

Zadania:

```
T26: FOR X,Y,Z ST X<>Y & Y<>Z & Z<>X
              HOLDS (M[X,Y,Z] OR M[X,Z,Y]) IFF (NW[X,Z] & NW[X,Y])
T27: FOR X,Y EX X',Y' ST M[X',X,Y'] & M[X',Y,Y']                  ;
T28: (EX X ST X=X) IMPLIES (EX X,Y,Z ST X<>Y & Y<>Z & X<>Z)       ;
```

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI