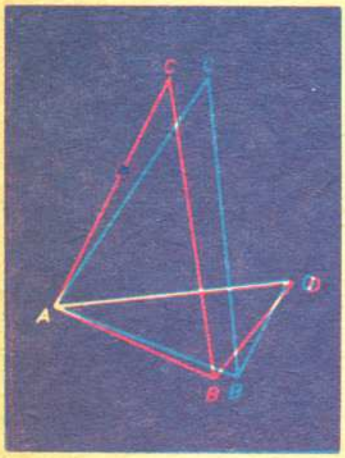
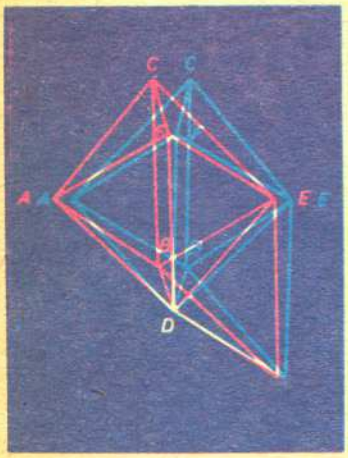
# O twierdzeniu Freudenthala — van der Waerdena

*Mgr Adam GAJDA*

Porównaj *Delta* 12/1975.





Mówić będziemy o wielościanach wypukłych, których ściany są trójkątami równobocznymi. Oznaczać będziemy dalej takie wielościany $RT$. Rozważymy pytanie, ile jest (z dokładnością do podobieństwa) wielościanów $RT$.

Nietrudno oszacować z góry ich liczbę. Jak łatwo zauważyć, w wierzchołkach wielościanu $RT$ może się zbiegać 3, 4 bądź 5 ścian — oznaczmy liczbę takich wierzchołków odpowiednio przez $w_3$, $w_4$ i $w_5$. Przypomnijmy teraz wzór Eulera

$$w-k+s = 2,$$

gdzie $w$ to liczba wierzchołków, $k$ — krawędzi, $s$ — ścian wielościanu wypukłego. Ponieważ ściany są trójkątami, więc

$$2k = 3s,$$

liczba wierzchołków wynosi

$$w = w_3+w_4+w_5,$$

a ponieważ każda krawędź łączy dwa wierzchołki, mamy

$$2k = 3w_3+4w_4+5w_5.$$

Wzór Eulera po podstawieniu tych zależności przybierze postać

$$6(w_3+w_4+w_5)-3(3w_3+4w_4+5w_5)+2(3w_3+4w_4+5w_5) = 12,$$

czyli
$$3w_3+2w_4+w_5 = 12,$$

które to równanie ma 19 rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych: **(4, 0, 0)**, (3, 1, 1), (3, 0, 3), **(2, 3, 0)**, (2, 2, 2), (2, 1, 4), (2, 0, 6), (1, 4, 1), (1, 3, 3), (1, 2, 5), (1, 1, 7), (1, 0, 9), **(0, 6, 0)**, **(0, 5, 2)**, **(0, 4, 4)**, **(0, 3, 6)**, **(0, 2, 8)**, (0, 1, 10), **(0, 0, 12)**.

Otrzymane oszacowanie nie jest jednak dobre. Zaledwie ośmiu rozwiązaniom wyróżnionym grubszą czcionką odpowiadają wielościany $RT$. Udowodnili to Freudenthal i van der Waerden.

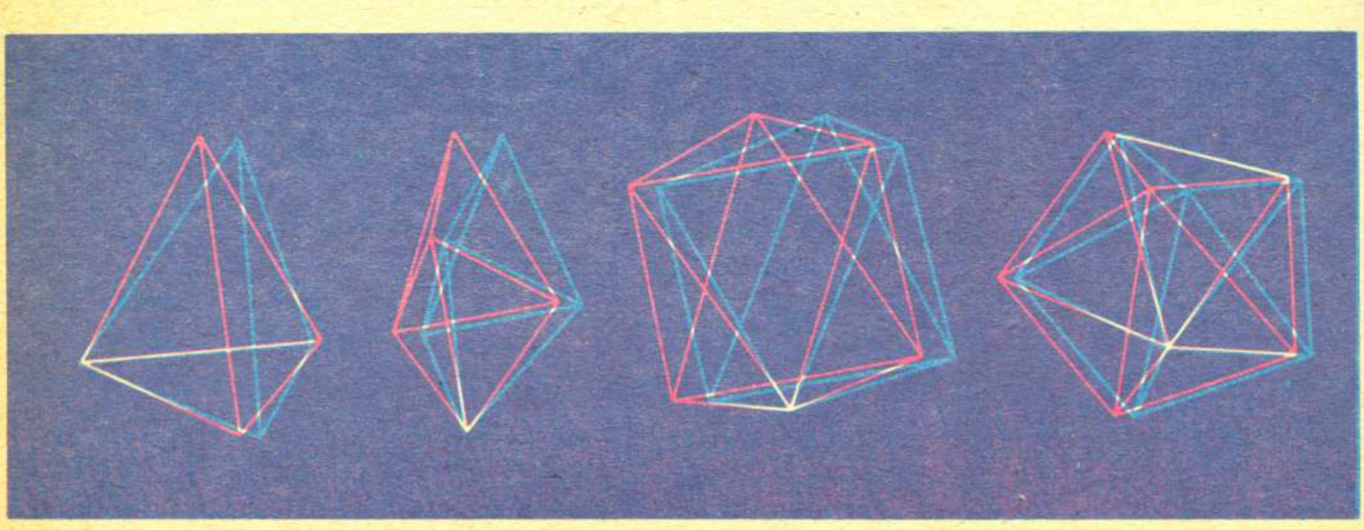
Poniżej podajemy dowód twierdzenia Freudenthala — van der Waerdena nie sprowadzający się, jak dotychczas publikowane, do eliminacji poszczególnych „złych" rozwiązań.

Zaczniemy od dwóch lematów.

**Lemat 1.** *Wielościan $RT$ o dwóch sąsiednich narożach trójściennych jest czworościanem.*

**Dowód.** Niech $A$ i $B$ będą trójściennymi wierzchołkami wielościanu $W$, a $C$ i $D$ różnymi wierzchołkami sąsiednimi względem $A$ i $B$. Wobec trójścienności $A$ i $B$ punkt $D$ jest sąsiednim wierzchołkiem względem $A$ i $C$ oraz względem $B$ i $C$. Krawędź $DC$ domyka zatem wielościan $W$, który wobec tego jest czworościanem $ABCD$.

**Lemat 2.** *Wielościan $RT$ o trzech narożach czterościennych przy jednej ścianie jest ośmiościanem.*

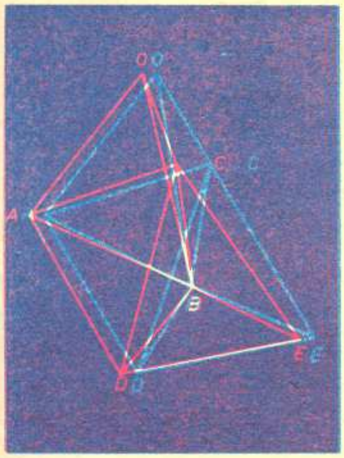


**Dowód.** Niech $ABC$ będzie ścianą wielościanu $W$ mającą we wszystkich wierzchołkach naroża czterościenne, a $D$ wierzchołkiem sąsiednim względem $A$ i $B$, $E$ — względem $B$ i $C$, $F$ — względem $A$ i $C$. Wobec czterościenności naroży $A$, $B$ i $C$ trójkąty $ADB$, $DBE$, $BEC$, $ECF$, $CFA$ i $FAD$ są ścianami $W$. Zatem $ABCDEF$ jest ośmiościanem. Przypuśćmy, że $W$ nie jest tym ośmiościanem i rozetnijmy $W$ płaszczyzną $DEF$ na ten ośmiościan i wielościan $RT$, który oznaczymy $W'$. Wielościan $W'$ nie może być czworościanem, gdyż wtedy $W$ nie byłby $RT$ jako mający trzy ściany będące rombami. Ale, gdyby naroża $D$, $E$, $F$ wielościanu $W'$ były więcej niż trójścienne, wielościan $W$ nie byłby wypukły. Przypuszczenie nasze okazało się więc fałszywe.

Za pomocą udowodnionych lematów wyeliminujemy teraz 10 „złych" rozwiązań:

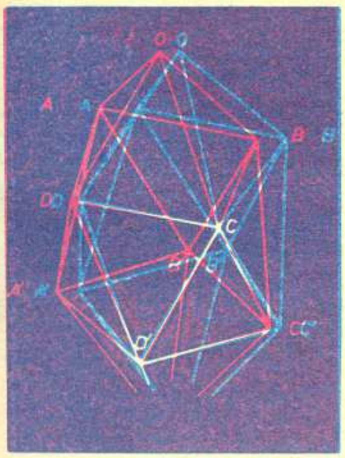
Czyli $w_3 \neq 0 \wedge w_3 \neq 4 \to w_3 = 2 \wedge w_4 = 3$.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli wielościan RT ma* (co najmniej) *jedno naroże trójścienne, to jest czworościanem lub sześciościanem* (złączeniem dwóch czworościanów o jednej ścianie wspólnej).



**Dowód.** Niech $O$ będzie trójściennym narożem wielościanu $W$, zaś $ABO$, $BCO$ i $ACO$ jego ścianami. Jeśli $W$ nie jest czworościanem, to płaszczyzna $ABC$ rozcina go na czworościan $ABCO$ i wielościan $RT$, który oznaczymy przez $W'$. Wobec wypukłości $W$ wielościan $W'$ jest zawarty we wnętrzu naroża $O$. Przypuśćmy, że $W'$ nie jest czworościanem. Naroża $A$, $B$, $C$ wielościanu $W'$ są co najwyżej czworościenne, gdyż w przeciwnym razie wielościan $W$ miałby naroża co najmniej sześciościenne. Z drugiej strony (wobec lematu 1) co najmniej dwa z nich są czterościenne. Wszystkie trzy jednak czworościenne być nie mogą, gdyż (wobec lematu 2) wówczas $W'$ byłby ośmiościanem i nie mieściłby się we wnętrzu naroża $O$. Rozpatrzmy wobec tego przypadek, gdy jedno z nich, powiedzmy $A$, jest trójścienne, a $B$ i $C$ — czterościenne. Oznaczmy przez $D$ (wspólny) sąsiedni wierzchołek $A$ i $B$ oraz $A$ i $C$. Odcinając od $W'$ płaszczyzną $BCD$ czworościan $ABCD$ otrzymujemy wielościan $RT$ o dwóch sąsiednich narożach ($B$ i $C$) trójściennych, a więc (wobec lematu 1) czworościan. Oznaczmy przez $E$ jego czwarty wierzchołek. Wówczas $E$ nie leży wewnątrz naroża $O$, a więc $W$ nie jest $RT$. Zatem przypuszczenie nasze okazało się fałszywe.

Pozostaje do wyeliminowania „złe" rozwiązanie (0, 1, 10).



**Twierdzenie 2.** *Nie ma wielościanu RT o dokładnie jednym narożu czterościennym.*

**Dowód.** Wobec twierdzenia 1 wystarczy wykazać, że nie ma takiego wielościanu bez naroży trójściennych. Weźmy pod uwagę wielościan $RT$ bez naroży trójściennych o czterościennym narożu $O$. Oznaczmy sąsiadujące z nim wierzchołki przez $A$, $B$, $C$, $D$. Przypuśćmy teraz, że wielościan nie ma innych naroży czterościennych. Naroża $A$, $B$, $C$, $D$ są zatem pięciościenne. W każdym z nich zbiegają się więc po trzy ściany nie należące do naroża $O$. Zbiegają się one po trzy w narożach $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, które też muszą być pięciościenne. Wobec tego w każdym z punktów $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ zbiegają się po dwie ściany nie przechodzące przez żaden z wierzchołków $A$, $B$, $C$, $D$. Mają one zatem wspólny wierzchołek, który wbrew naszemu przypuszczeniu okazuje się czterościenny.

W ten sposób dowód twierdzenia Freudenthala — van der Waerdena został zakończony.