

Opisując dowody w odcinku 3 i 4 (*Delta* 12/1983, 1/1984) pokazaliśmy, że ich struktura w Mizarze MSE jest praktycznie wyznaczona przez postać dowodzonej tezy. Dowodzący ma jednak pewną dowolność w ustalaniu szczegółów tej struktury, jak również on decyduje, czy będzie dowodził wprost czy nie. Przypominamy, że kroki stanowiące strukturę dowodu to: założenia (**assume ...**, **let ... such that ...**, **given ...**), deklaracje zmiennych (**let... be ...**) oraz konkluzje (**thus ...**, **hence ...**). Biorąc pod uwagę jedynie te elementy dowodu jesteśmy w stanie ustalić, czy dany dowód może być dowodem danej tezy. To, czy jest dowodem poprawnym, zależy jeszcze od tego, czy wszystkie uzasadnienia zawarte w nim (tak konkluzji, jak i kroków pomocniczych) są akceptowane przez moduł sprawdzający (checker).

Możemy zatem postawić pytanie: czy widząc jedynie dowód jesteśmy w stanie stwierdzić, jaka teza była dowodzona? Odpowiedź jest pozytywna pod warunkiem, że w tym dowodzie nie posługiwano się symbolem **thesis**, gdyż wtedy zdanie kryjące się za **thesis** zależy od dowodzonej tezy, a tej przecież nie znamy.

W Mizarze istnieje możliwość napisania ciągu kroków dowodowych, lecz bez jawnego napisania, jakiej tezy dowodzimy. Konstrukcja taka nazywa się rozumowaniem i rozpoczyna się od słówka **now** (co znaczy „a teraz”), a kończy się jak dowód słowem **end**. To, co może wystąpić między tymi dwoma symbolami, jest dokładnie tym samym, co może znaleźć się w dowodzie.

A co ta konstrukcja znaczy? Otóż, gdybyśmy spojrzeli na nią jak na dowód, to jej znaczeniem jest właśnie zdanie, które byłoby tezą takiego dowodu. Przed **now** możemy postawić etykietę i powołując się na nią w istocie powołujemy się na to zdanie. Weźmy dobrze nam znany przykład, że zwrotność wynika ze spójności.

```
A: FOR X HOLDS NMCX,XJ
PROOF
LET X' BE ULAMEKJ
THUS NMCX',X'J BY SPOJNOSC
ENDF
```

A oto równoważne temu dowodowi rozumowanie:

```
A': NOW
LET X BE ULAMEKJ
THUS NMCX,XJ BY SPOJNOSC
ENDF
```

W dalszym ciągu tekstu w Mizarze nie ma różnicy, czy powołamy się na *A*, czy na *A'*. Obie te etykiety oznaczają takie samo zdanie, a konstrukcja z **now** jest wyraźnie krótsza.

Ktoś spyta: po co zatem dowody? Po prostu czasami dla czytelności warto napisać dowodzoną tezę w sposób jawny.

Po drugie w rozumowaniu (**now**) nie możemy używać **thesis** w takim sensie jak w dowodzie, co przecież tak skraca zapis. Jeśli **thesis** występuje wewnątrz konstrukcji **now ... end**, to jest to **thesis** dowodu, który tę konstrukcję (bezpośrednio) zawiera. A jeśli takiego dowodu nie ma? Wtedy mamy błąd (maszyna to skrzętnie komunikuje), gdyż poza dowodem znaczenie **thesis** nie jest określone.

Konstrukcja rozumowania jest bardzo przydatna dla formułowania „lematów”, czyli tych kroków

w dowodzie, które wymagają wewnętrznych dowodów. Spójrzmy na przykłady z poprzedniego odcinka, ale zapisane przy użyciu **now**.

```
FOR X,Y EX Z ST NMCX,ZJ & NMEY,ZJ
PROOF
LET X',Y' BE ULAMEKJ
A: NOW
ASSUME NMCX',Y'J
THEN NMCX',Y'J & NMEY',Y'J BY ZWROTNOSC
HENCE THESIS
ENDF
NOW
ASSUME NMEY',X'J
THEN NMEY',X'J & NMCX',X'J BY ZWROTNOSC
HENCE THESIS
ENDF
HENCE THESIS BY A,SPOJNOSC
ENDF
```

Słownikiem **thesis** posłużyliśmy się trzykrotnie. Za każdym razem oznaczało ono zdanie, które pozostało do udowodnienia w dowodzie głównym. Oczywiście, konkluzje wewnątrz rozumowań nie wpływały na zmianę znaczenia tego **thesis**. Powołaliśmy się również na efekt rozumowania (tj. na pewne zdanie) za pomocą zahaczenia przez **hence** przy dokonywaniu ostatecznej konkluzji w dowodzie. Takie niejawne zdanie otrzymywane jako efekt rozumowania nie może występować nigdzie tam, gdzie mogą występować zdania sformułowane *explicite*. W szczególności nie jest dozwolone napisanie przed **now** symboli: **then**, **thus**, **hence**.

Ostatni dowód z poprzedniego odcinka skraca się znacznie, jeśli zamiast dowodów wewnętrznych użyjemy rozumowań. Zwróćmy uwagę na wystąpienie rozumowania wewnątrz innego rozumowania.

```
FOR X,Y HOLDS
(EX Z ST NMCX,ZJ & NMCZ,YJ & X<Z & Z<Y) IFF (X<Y & NMCX,YJ)
PROOF LET X,Y BE ULAMEKJ
== PRAWDZIWOSC PIERWSZEJ IMPLIKACJI UZYSKAMY PRZEZ RUMOWANIE.
== TAK PISZEMY NIEFORMALNY, POZAHIZAROWY KOMENTARZ.
NOW
GIVEN Z SUCH THAT
A': NMCX,ZJ AND B': NMCZ,YJ AND C': X<Z AND Z<Y
NOW ASSUME X=Y THEN Z=X BY A',B',ANTYSYMETRIA
HENCE CONTRADICTION BY C'
ENDF
HENCE X<Y
THUS NMCX,YJ BY A',B',PRZECHODNOSC
ENDF
HENCE THESIS BY GESTOSC
ENDF
```

Zwróćmy uwagę, że **thesis** w tym dowodzie oznacza koniunkcję obu implikacji potrzebnych do wykazania równoważności. Pierwsza z nich jest gwarantowana przez dopiero co zakończone rozumowanie (stąd **hence**), a druga wynika bezpośrednio z gęstości. Zauważmy, że najbardziej wewnętrzne rozumowanie było oparte na sprowadzeniu do sprzeczności. Jakie było zatem zdanie odpowiadające temu rozumowaniu? Było ono po prostu zaprzeczeniem przyjętego w tym rozumowaniu założenia.

Zadania:

(przypominamy o wprowadzonym pojęciu leżenia między)

```
T23: FOR X,Y,Z,X',Y' ST HEX,X'>YJ & HEY,Y'>ZJ
HOLDS HEX,Y'>ZJ & HEX',Y'>J
T24: FOR X,Y,Z ST HEX,Y'>ZJ OR HEX',Y'>J
HOLDS NMCX,YJ & NMCX',ZJ
T25: FOR X,Y EX Z ST NOT NMCX,ZJ & NOT NMEY,ZJ
```

Przypominamy

Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI