Liga zadaniowa
Wydziału Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu
Warszawskiego
i Redakcji „Delty"

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 82, 83, 84

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1984

82. Po krawędziach sześcianu pełza żuk. Na przejście jednej krawędzi zużywa minutę. Znalazłszy się w wierzchołku, wchodzi na jedną z trzech krawędzi wychodzących z tego wierzchołka, z równym prawdopodobieństwem wyboru (1/3). Niech A i Z będą przeciwległymi wierzchołkami sześcianu. W chwili $t = 0$ żuk znajduje się w wierzchołku A. Czas, po którym żuk po raz pierwszy znajdzie się w wierzchołku Z, jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

[Użyteczny może być wzór: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$ dla $|x| < 1$].

83. Każdy z wierzchołków równoległoboku o danym polu S połączono odcinkami ze środkami boków wychodzących z przeciwległego wierzchołka. W środku równoległoboku odcinki te tworzą ośmiokąt. Obliczyć jego pole.

84. Czy istnieje liczba naturalna, której każda wielokrotność ma albo wszystkie cyfry parzyste, albo wszystkie cyfry nieparzyste?

Zadanie 84 przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z numeru 12/1983

Przypominamy treść zadań:

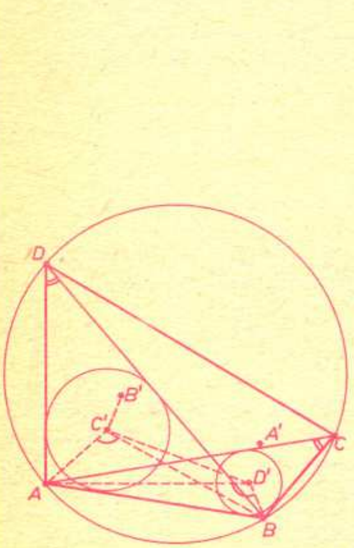
70. Dane są trzy ciągi skończone liczb rzeczywistych (a_i), (b_i), (c_i), $i = 1, \ldots, n$, takie, że $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$, a ciąg (c_i) jest nieidentycznościową permutacją ciągu (b_i). Dowieść, że $\sum a_ib_i > \sum a_ic_i$.

71. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło. Udowodnić, że środki kół wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB są wierzchołkami prostokąta.

72. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ znaleźć rozkład liczby 1 na sumę n odwrotności różnych liczb naturalnych.

70. Niech (d_i) będzie optymalną permutacją ciągu (b_i), czyli tą, dla której wartość wyrażenia $\sum a_id_i$ jest maksymalna. Jeśli istnieją numery k, l takie, że $k < l$, $d_k > d_l$, to z nierówności $a_k < a_l$ otrzymujemy $a_kd_k+a_ld_l < a_kd_l+a_ld_k$, a więc, pisząc $d_k' = d_l$, $d_l' = d_k$, $d_i' = d_i$ dla $i \neq k, l$, widzimy, że $\sum a_id_i' > \sum a_id_i$, wbrew maksymalności prawej strony. Zatem $d_1 < \ldots < d_n$, czyli jedyną permutacją optymalną jest permutacja identycznościowa. Stąd teza.

71. Oznaczmy środki wymienionych kół kolejno przez D', A', B', C'. Wówczas (patrz rysunek): $\sphericalangle AC'B = \pi-(\sphericalangle DAB+\sphericalangle ABD)/2 = \pi-(\pi-\sphericalangle ADB)/2 = (\pi+\sphericalangle ADB)/2$ i podobnie $\sphericalangle AD'B = (\pi+\sphericalangle ACB)/2$. Zatem z równości $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ wynika równość $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle AD'B$ oznaczająca, że na czworokącie $ABD'C'$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle AC'D' = \pi-\sphericalangle ABD' = \pi-\sphericalangle ABC/2$. Analogicznie $\sphericalangle AC'B' = \pi-\sphericalangle ADC/2$. Dodając otrzymane równości stronami stwierdzamy, że wklęsły kąt $B'C'D'$ równa się $2\pi-(\sphericalangle ABC+\sphericalangle ADC)/2 = 3\pi/2$. W ten sposób dowodzimy, że wszystkie kąty czworokąta $A'B'C'D'$ są proste.



72. Przykładowy rozkład: $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}+\frac{1}{6\cdot 2^{n-3}}$.
Inna metoda: jeśli (r_n) jest ciągiem określonym wzorami $r_1 = 1$, $r_{n+1} = r_n(r_n+1)$, to wówczas $1 = (r_1+1)^{-1}+\ldots+(r_{n-1}+1)^{-1}+r_n^{-1}$ (łatwy dowód indukcyjny).