O wyższości ułamków łańcuchowych nad rozwinięciami dziesiętnymi

Dr Jerzy RYLL

O ułamkach łańcuchowych pisał w *Delcie* 5/1979 prof. dr Andrzej Schinzel.

Czytelnicy *Delty* znają doskonale rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych. Wiedzą, kiedy ułamek ma rozwinięcie skończone, wiedzą też, że liczby wymierne (i tylko one) rozwijają się w ułamki okresowe. Cóż to jednak jest ułamek łańcuchowy?

$[a]$ oznacza część całkowitą liczby a, tzn. $[a]$ jest liczbą całkowitą i $[a] \leqslant a < [a]+1$.

Weźmy liczbę rzeczywistą a i oznaczmy $k_0 = [a]$. Gdy a nie jest całkowita, weźmy $a_1 = \dfrac{1}{a-[a]}$ i postąpmy z liczbą a_1 podobnie — tzn. $k_1 = [a_1]$ i jeśli $a_1 \notin Z$ (zbiór liczb całkowitych), to $a_2 = \dfrac{1}{a_1-[a_1]}$. Idąc tak dalej tworzymy dwa ciągi — (a_n) i (k_n) $\left(k_n = [a_n];\ a_n = k_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ i możemy napotkać liczbę całkowitą a_n — otrzymamy skończony ciąg $k_0, \ldots, k_n$; lub nie — wtedy wynikiem naszego postępowania jest nieskończony ciąg $k_0, k_1, \ldots$ liczb naturalnych (k_0 może być ujemne). W przypadku pierwszym interpretacja otrzymanego ciągu jest prosta:

Dla $a = \sqrt{2}$ mamy $k_0 = 1$; $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ i $k_1 = 2$; $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1$ i $k_2 = 2; \ldots; a_n = \sqrt{2}+1$ i $k_n = 2; \ldots$

$$a = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots + \cfrac{1}{k_n}}}$$

i a jest liczbą wymierną. Ułamek po prawej stronie nazywamy ułamkiem łańcuchowym długości n. $\left(\text{Tu umowa — ułamek taki będziemy dla oszczędności miejsca zapisywać } k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_n}\right)$. Co więcej, każda liczba wymierna da się zapisać jako ułamek łańcuchowy skończony. Jak jednak interpretować ciąg nieskończony?

Niech $a = \dfrac{k}{l}$ $(k, l \in Z, l > 1)$. Wtedy $a-[a] = \dfrac{m}{l}$ i $0 < m < l$, a zatem $a_1 = \dfrac{l}{m}$ i $m < l$; po co najwyżej l krokach dojdziemy do liczby całkowitej.

Liczbę wymierną $w_n = k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_n}$ nazwijmy n-tym reduktem liczby a, natomiast a_n — n-tą resztą. Pokażemy, że ciąg reduktów liczby a jest do niej zbieżny. Będzie to uzasadniało zapis $a = k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_n} + \ldots$ oraz nazwę — ułamek łańcuchowy nieskończony — dla tego zapisu. Przedstawmy n-ty redukt w postaci ułamka nieskracalnego $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(p_n, q_n \in Z;\ q_n > 0)$.

Ładne rozwinięcie na ułamek łańcuchowy ma złota proporcja: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1|}{|1} + \dfrac{1|}{|1} + \ldots$

Wtedy ciągi (p_n) i (q_n) spełniają zależności rekurencyjne

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_n &= p_{n-1}k_n + p_{n-2}, \quad & p_0 &= k_0, \quad & p_1 &= k_0k_1+1, \\ q_n &= q_{n-1}k_n + q_{n-2}, \quad & q_0 &= 1, \quad & q_1 &= k_1. \end{aligned}$$

Zarazem dla dowolnych różnych od zera liczb rzeczywistych $k_0, \ldots, k_n$ jeśli liczby p_i, q_i $(i = 0, \ldots, n)$ spełniają (1), to $\dfrac{p_i}{q_i} = k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Jeśli liczby k_i $(i = 1, 2, \ldots)$ są naturalne i liczby p_i, q_i $(i = 0, 1, \ldots)$ spełniają (1), to liczby p_i, q_i $(i = 0, 1, \ldots)$ są względnie pierwsze.

Mamy pokazać, że jeśli liczby p_i, q_i $(i = 0, \ldots, m)$ spełniają (1), to $\dfrac{p_i}{q_i} = k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_i}$ $(i = 0, \ldots, m)$.
Dla $m = 0$ i 1 jest to oczywiste. Załóżmy, że udowodniliśmy powyższe stwierdzenie dla pewnego m i dla dowolnych liczb $k_0, \ldots, k_m \in R\setminus\{0\}$.
Weźmy liczby $l_0, \ldots, l_{m+1} \in R\setminus\{0\}$ i niech $k_0 = l_0, \ldots, k_{m-1} = l_{m-1}, k_m = l_m + \dfrac{1}{l_{m+1}}$. Korzystając z założenia indukcyjnego mamy (liczby p_i i q_i są utworzone dla ciągu $l_0, \ldots, l_{m+1}$; dla $i \leqslant m-1$, są one takie same dla $k_0, \ldots, k_{m-1}$).

$$l_0 + \frac{1|}{|l_1} + \ldots + \frac{1|}{|l_{m+1}} = k_0 + \frac{1|}{|k_1} + \ldots + \frac{1|}{|k_m} = \frac{p_{m-1}k_m + p_{m-2}}{q_{m-1}k_m + q_{m-2}} = \frac{(p_{m-1}l_m + p_{m-2})l_{m+1} + p_{m-1}}{(q_{m-1}l_m + q_{m-2})l_{m+1} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}.$$

Mamy bowiem

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = p_{n-1}(q_{n-1}k_n + q_{n-2}) - (p_{n-1}k_n + p_{n-2})q_{n-1} = -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) = \ldots = (-1)^{n-1}(p_0q_1 - p_1q_0) = (-1)^n.$$

Tak więc p_n i q_n nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1.

Mamy oczywiście $a = k_0 + \dfrac{1|}{|k_1} + \ldots + \dfrac{1|}{|k_n} + \dfrac{1|}{|a_{n+1}}$. Ze wzoru (1) stosowanego dla ciągu $k_0, k_1, \ldots, k_n, a_{n+1}$ mamy

$$a = \frac{p_na_{n+1} + p_{n-1}}{q_na_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Obliczmy różnicę między liczbą a i jej n-tym reduktem

$$a - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_nq_na_{n+1} + p_{n-1}q_n - p_nq_na_{n+1} - p_nq_{n-1}}{(q_na_{n+1} + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_na_{n+1} + q_{n-1})q_n}.$$

A zatem redukty parzyste są mniejsze, a nieparzyste większe od a oraz (z uwagi na nierówności $q_{n+1} < q_n a_{n+1} + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n$)

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})} < \left|a - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Ze wzoru (1) wynika, iż $q_n \geqslant n$, a zatem $\lim \frac{p_n}{q_n} = a$. Każdej liczbie niewymiernej odpowiada więc ułamek łańcuchowy nieskończony. Ale i na odwrót — jeśli dany jest ciąg (k_n) liczb naturalnych (k_0 może być ujemne), to ciąg jego reduktów jest zbieżny (do liczby niewymiernej, oczywiście), przy czym różnym ułamkom łańcuchowym odpowiadają różne liczby rzeczywiste (trzeba się tylko umówić, że ostatni wyraz w ułamku skończonym jest większy niż 1).

Wystarczy pokazać, że ciąg reduktów ułamka łańcuchowego spełnia warunek Cauchy'ego. (Tzn: dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć takie n_ε, że dla $n > n_\varepsilon$ i $k \in N$ mamy $\left|\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \varepsilon$). Ale

$$\left|\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k}\left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-1}}\right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

No dobrze, ale po co takie dziwolągi jak ułamki łańcuchowe? Czy rzeczywiście są pod jakimiś względami lepsze od rozwinięć dziesiętnych? Otóż tak — ciąg reduktów jest wyróżniony wśród innych ciągów liczb wymiernych, zbieżnych do danej liczby rzeczywistej. Mówią o tym prawa najlepszego przybliżenia.

Oczywiście odległość dowolnej liczby rzeczywistej od zbioru liczb wymiernych jest zero — nie ma sensu mówić o najlepszym przybliżeniu wśród nich. Można natomiast szukać takiego elementu wśród liczb o mianownikach niewiększych od ustalonej liczby m. Jeśli $\frac{k}{m}$ jest najbliższym a elementem tego zbioru, to nazywamy $\frac{k}{m}$ najlepszym przybliżeniem pierwszego rodzaju.

Innymi słowy $\frac{k}{m}$ musi spełniać warunek:

$$\text{Jeśli } \frac{r}{s} \neq \frac{k}{m} \text{ i } \left|\frac{r}{s} - a\right| \leqslant \left|\frac{k}{m} - a\right|, \text{ to } s > m.$$

$$\pi = 3 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|15} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|292} + \ldots$$

reduktami są więc ułamki $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ używane jako dobre przybliżenia liczby π.

Wszystkie redukty są takimi najlepszymi przybliżeniami (będzie to wynikać z dalszych rozważań). Ale nie tylko one. Poza nimi takimi przybliżeniami mogą być, lecz nie muszą, ułamki pośrednie, tzn. ułamki postaci

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_{n-1}+p_n}{q_{n-1}+q_n}, \frac{p_{n-1}+2p_n}{q_{n-1}+2q_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}+k_{n+1}p_n}{q_{n-1}+k_{n+1}q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Dla $a = \frac{1}{4}$ mamy $k_0 = 0$, $k_1 = 4$, a więc redukty to $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{4}$, ułamków pośrednich brak. Tymczasem najlepszym przybliżeniem jest np. $\frac{1}{3}$. Otóż jeśli wprowadzimy redukt długości (-1) jako formalny iloraz $\frac{1}{0}$, tzn. $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, to wśród ułamków pośrednich pojawi się $\frac{1}{3}$.

Można rozpatrywać nieco inne — mocniejsze — pojęcie przybliżania. Liczbę $\frac{k}{m}$ nazywamy najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju, gdy spełnia warunek:

$$\text{Jeśli } \frac{r}{s} \neq \frac{k}{m} \text{ i } |r - sa| \leqslant |k - ma|, \text{ to } s > m.$$

Oczywiście każde takie przybliżenie jest przybliżeniem w poprzednim sensie, ale nie odwrotnie. Teraz można podać pełną charakteryzację reduktów danej liczby.

$\frac{1}{3}$ jest najlepszym przybliżeniem pierwszego rodzaju liczby $\frac{1}{5}$, ale nie jest najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju, bo $\left|1 \cdot \frac{1}{5} - 0\right| < \left|3 \cdot \frac{1}{5} - 1\right|$ i $1 < 3$.

Każde najlepsze przybliżenie drugiego rodzaju liczby a jest jej reduktem i odwrotnie, każdy redukt jest jej najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju (jedyny oczywisty wyjątek to połowa liczby nieparzystej i jej zerowy redukt).

A oto dowód: Jeśli ułamek $\frac{l}{m}$ jest najlepszym przybliżeniem $a = k_0 + \frac{1|}{|k_1} + \ldots + \frac{1|}{|k_n} + \ldots$, to $\frac{l}{m} > k_0$. $\left(\text{Inaczej } |1 \cdot a - k_0| < \left|a - \frac{l}{m}\right| \leqslant |ma - l|, \text{ ale } m \geqslant 1\right)$. Jeśli $\frac{l}{m}$ nie jest reduktem a, to jest zawarte między dwoma reduktami a o tej samej parzystości $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ lub jest większe niż $\frac{p_1}{q_1}$ (ciąg reduktów parzystych rośnie, a nieparzystych maleje). W pierwszym przypadku

$$\frac{1}{q_n q_{n-1}} = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{l}{m} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \geqslant \frac{1}{mq_{n-1}}$$

$\left(\frac{p_n}{q_n}\right.$ leży po innej stronie a niż $\left.\frac{l}{m} \text{ i } \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$. A więc $m > q_n$. Z drugiej strony

$$|q_n a - p_n| \leqslant \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{m}{q_{n+1} \cdot m} \leqslant m\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{l}{m}\right| \leqslant m\left|a - \frac{l}{m}\right| = |ma - l|,$$

czyli $\frac{l}{m}$ nie jest najlepszym przybliżeniem. W drugim przypadku postępujemy podobnie.

Nieco bardziej skomplikowany jest dowód drugiej części. Chcemy pokazać, że redukt $\frac{p_N}{q_N}$ jest najlepszym przybliżeniem drugiego rodzaju. Wśród ułamków $\frac{l}{m}$ o mianownikach niewiększych niż q_N wybieramy ten — o najmniejszym mianowniku — dla którego wyrażenie $|ma-l|$ jest najmniejsze. Ułamek ten — $\frac{l_0}{m_0}$ — jest wyznaczony jednoznacznie, jest zatem najlepszym przybliżeniem a, więc na podstawie udowodnionego poprzednio reduktem a — powiedzmy i-tym ($i \leqslant N$). Gdyby było $i < N$, otrzymalibyśmy sprzeczność:

$$\frac{1}{q_{N+1}} \leqslant \frac{1}{q_N+q_{N-1}} \leqslant \frac{1}{q_{i+1}+q_i} < |q_i a - p_i| \leqslant |q_N a - p_N| < \frac{1}{q_{N+1}}$$

$\left(\text{przedostatnia nierówność wynika z określenia } \frac{l_0}{m_0} = \frac{p_i}{q_i}\right).$

> Oczywiście m_0 jest wyznaczone jednoznacznie. Gdyby dla $l_0 \neq l_1$ było $\left|a-\frac{l_0}{m_0}\right| = \left|a-\frac{l_1}{m_1}\right|$, to $a = \frac{l_0+l_1}{2m_0}$. Ułamek ten jest nieskracalny — inaczej samo a (po skróceniu) byłoby lepszym przybliżeniem a niż $\frac{l_0}{m_0} \neq a$ — zatem jest reduktem (n-tym) liczby a. Mamy więc
>
> $$p_n = l_0+l_1,\ q_n = 2m_0 = k_n g_{n-1}+q_{n-2}$$
>
> (gdzie $k_n \geqslant 2$), czyli dla $k_n > 2$ lub $k_n = 2$ i $n > 1$ jest $q_{n-1} < m_0$. Ale $|q_{n-1}a-p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2m_0} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{l_0-l_1}{2}\right| = |am_0-l_0|$, co przeczy wyborowi m_0.

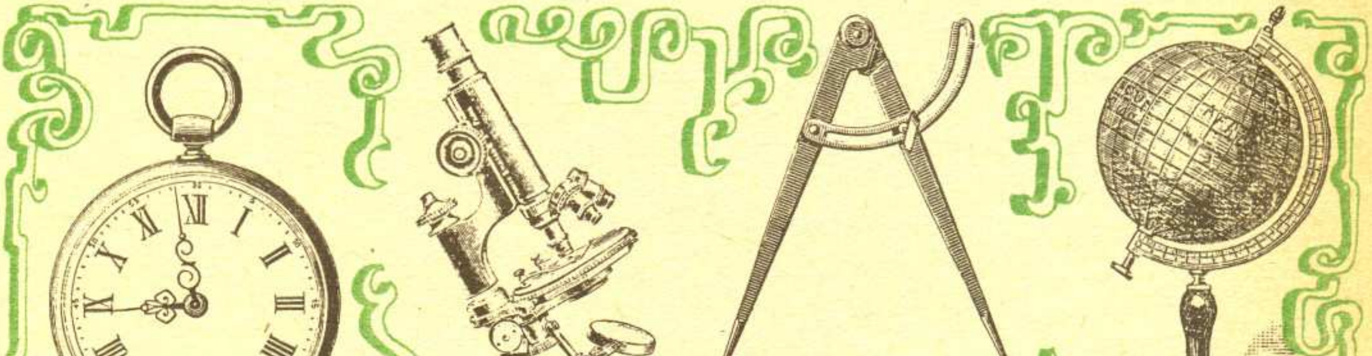
Widzieliśmy już, że $\sqrt{2} = 1+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|2}+\ldots$, ułamek łańcuchowy jest okresowy. Ułamek okresowy zawsze przedstawia pierwiastek (niewymierny) równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych (niewymierność kwadratową). Jeśli bowiem ułamek jest okresowy, to ciąg reszt (a_n) też jest okresowy, czyli $a_m = a_n$ dla $m \neq n$. A zatem

$$a = \frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}} = \frac{p_{m-1}a_n+p_{m-2}}{q_{m-1}a_n+q_{m-2}},$$

czyli a_n (i również a) jest niewymiernością kwadratową ($p_{n-1}\, q_{m-1}-p_{m-1}\, q_{n-1} \neq 0$).

Okazuje się, że również odwrotnie, każda niewymierność kwadratowa rozwija się w ułamek łańcuchowy okresowy. Reszty niewymierności kwadratowej a są również niewymiernościami kwadratowymi. Równania kwadratowe, których są pierwiastkami, mają współczynniki wspólnie ograniczone — jest ich więc skończenie wiele. Pewne dwie reszty a_{n+k} i a_k muszą być więc równe i ułamek musi być okresowy.

Ułamki łańcuchowe mają również wady. Rozwinięcia dziesiętne łatwo dodawać — jak jednak dodać dwa ułamki łańcuchowe, tzn. jak znaleźć trzeci ułamek łańcuchowy będący ich sumą? To pytanie pozostaje bez odpowiedzi.



Sprawozdawczość rzecz ważna, czyli $\frac{0}{0} = ?$

Oto problem, z jakim zetknęli się pracownicy w pewnym instytucie badawczym. Co miesiąc musieli wypełniać formularze dotyczące czasu i sposobu wykorzystania kosztownych urządzeń w tymże instytucie. Między innymi trzy rubryki: pierwsza — czas, przez jaki urządzenie było sprawne w ciągu miesiąca; druga — czas, przez jaki to urządzenie pracowało i trzecia, najważniejsza — stopień wykorzystania urządzenia — iloraz dwu poprzednich liczb.

Niestety, w kwietniu jeden z przyrządów był cały czas zepsuty. Dwie pierwsze rubryki nie budziły wątpliwości: 0; 0. Ale co napisać w trzeciej?

Zero — stwierdził Magister wypełniający formularz — przecież przyrząd ani chwili nie pracował.

Jeden — powiedział Docent, kierownik pracowni — przyrząd pracował cały czas, przez który był sprawny.

A może nieskończoność — zaproponował Adiunkt — niedoszły użytkownik — tyle osób chciało przy nim pracować, licznik jest więc jakby dodatni, więc przy dzieleniu przez zero wyjdzie nieskończoność.

Historię opowiedział zaprzyjaźniony matematyk, którego jeden z pracowników instytutu poprosił o pomoc.

J. R.