rachunku prawdopodobieństwa, równań różniczkowych i ich zastosowań, a także (ostatnio coraz częściej) wykorzystujące możliwości, jakie dają komputery. Zajrzyjcie do następujących numerów *Delty*: 8/1978, 11/1979, 1/1981, 2/1982, 1/1983. Publikowaliśmy w nich wyniki kolejnych konkursów, podawaliśmy tytuły wyróżnionych prac oraz nazwiska autorów i ich nauczycieli. Zobaczycie, że napływały i były wyróżniane prace konkursowe ze wszystkich stron kraju, zarówno z dużych ośrodków, jak i z małych miejscowości. Ta powszechność zawsze bardzo nas cieszyła.

Zachęcamy Was do przejrzenia starych numerów *Delty*, w których publikowaliśmy wyniki nagrodzone złotymi medalami. Pozwoli to Wam zorientować się, jaki poziom osiągnęli najlepsi. Czasami jednak prace są nagradzane medalami lub wyróżniane dyplomami nie tylko za otrzymany wynik, ale za oryginalną metodę, ciekawy pomysł lub wyjątkowo staranne i wszechstronne opracowanie.

Bardzo serdecznie zapraszamy wszystkich zainteresowanych do udziału w naszym konkursie. Mile widzimy wszelkie samodzielne prace; wcale nie muszą one wybiegać daleko w tak zwaną matematykę wyższą. Nie musicie studiować opasłych tomów — starajcie się natomiast zgłębić zagadnienie, które wydaje się Wam ciekawe, poproście nauczycieli o wskazanie literatury i przyślijcie nam wyniki swej pracy. Czekamy.

*Redakcja*

# O pewnej metodzie całkowania

*Jacek KALETA*

Do napisania tej pracy skłoniła mnie chęć znalezienia całki nieoznaczonej funkcji

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(bez uwzględnienia stałej całkowania). Nie chodziło mi o dokładny wzór, ale o wzór przybliżony i dość dokładny dla dużego przedziału zmienności $x$. Powyższa funkcja ma pewne podobieństwo do funkcji $e^x$. Czy więc i ich całki nie mogłyby być podobne? Zapiszmy

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = A_0(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

gdzie $A_0$ jest pewną funkcją zmiennej $x$. Różniczkując obie strony mamy:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = (A_0'(x)-x\cdot A_0(x))\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},$$
$$1 = A_0'(x)-x\cdot A_0(x).$$

Przyjmując, że $A_0'$ jest prawie równe zeru, otrzymujemy rozwiązanie przybliżone

$$\tilde{A}_0(x) = -\frac{1}{x}.$$

Drugi krok jest podobny:

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = A_1(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Różniczkując mamy

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = A_1'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)+A_1(x)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{x}(-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$1 = A_1'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+A_1(x)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right).$$

Przyjmując ponownie, że $A_1'$ jest bliskie zera, otrzymujemy rozwiązanie przybliżone

$$\tilde{A}_1(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Następny krok daje

$$\tilde{A}_2(x) = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2-2}.$$

Nietrudno zauważyć, iż liczniki i mianowniki kolejnych funkcji $\tilde{A}_1$ i $\tilde{A}_2$ są bardzo podobne, czyli są one bliskie jedności. Nie popełnimy więc dużego błędu, jeżeli zapiszemy

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \approx -\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_a^b$$

lub

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \approx -\frac{1}{x}\,\frac{x^2}{x^2+1}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_a^b.$$

Ten i inne przykłady doprowadziły mnie do następującej metody obliczania całek niektórych funkcji.

Dla danej funkcji $f$ określamy rekurencyjnie ciąg funkcji $C_n$:

$$C_0\equiv 1,\qquad C_{n+1} = \frac{f}{\left(f\cdot\prod_{j=0}^{n}C_j\right)'}$$

(Funkcja $f$ musi spełniać pewne warunki po to, żeby funkcje $C_n$ były dobrze określone powyższym wzorem — zakładamy dalej, że te warunki są spełnione).

Twierdzenie 1. Jeśli $C_{m+1}\equiv 1$, to $\int f(x)dx = \left(\prod_{j=0}^{m}C_j(x)\right)\cdot f(x)$.

Na przykład niech $f(x) = x^n$. Wtedy

$$C_0(x) = 1,$$
$$C_1(x) = \frac{x^n}{(1\cdot x^n)'} = \frac{x^n}{nx^{n-1}} = \frac{x}{n},$$
$$C_2(x) = \frac{x^n}{\left(1\cdot\frac{x}{n}\cdot x^n\right)'} = \frac{x^n}{\frac{n+1}{n}x^n} = \frac{n}{n+1},$$
$$C_3(x) = \frac{x^n}{\left(1\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot x^n\right)'} = \frac{x^n}{\frac{n+1}{n+1}x^n} = 1$$

i stąd $\displaystyle\int x^n dx = 1\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot 1\cdot x^n = \frac{x^n}{n+1}.$

Twierdzenie 2. Jeśli ciąg $\prod_{j=0}^{n}C_j$ jest zbieżny (jednostajnie) do funkcji $F$, to $\int f(x)dx = F(x)\cdot f(x)$.

Artykuł jest skrótem pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1983 roku.