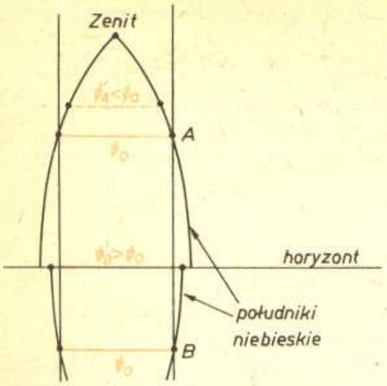

Rys. 6. Refrakcja w atmosferze sprawia, że średnicę kątową Φ_0 obiektu niebieskiego obserwator ziemski zobaczy bądź jako mniejszą (Φ'_A), bądź jako większą (Φ'_B) — zależnie od tego, czy obiekt w rzeczywistości jest nad (A), czy pod horyzontem (B) (rysunek mocno przesadzony).

2° ze względu na symetrię soczewki atmosferycznej (osią symetrii jest prosta przechodząca przez zenit) refrakcja światła w atmosferze powoduje pozorne podniesienie ciał niebieskich jedynie wzdłuż południków niebieskich (kół wielkich na niebie przecinających się w zenicie — rys. 6), skutkiem czego Słońce znajdujące się faktycznie (tzn. bez uwzględnienia refrakcji) nad horyzontem musi obserwator ziemski widzieć jako mniejsze (dokładniej: węższe), a jako szersze widzi je tylko w tym krótkim okresie, który upływa od chwili jego faktycznego przejścia przez płaszczyznę horyzontu do momentu widzianego z Ziemi zachodu (podobnie przy wschodzie); czy to ma istotne znaczenie?

3° wschodzące lub zachodzące Słońce i Księżyc świecą słabiej i mają inną barwę (to zasługa rozpraszania światła słonecznego i księżycowego w atmosferze); czy ma tu miejsce (a jeśli tak, to czy jest istotne) złudzenie optyczne polegające na pozornej zmianie rozmiarów źródła światła przy zmianie jego barwy lub (i) jasności? czy ważna może tu być zmiana jasności nieba?

Jak wynika z powyższych przykładów, nie wszystkie czynniki na naszej liście dadzą się zanalizować ściśle (ilościowo). Dlatego racjonalizm warto w takich przypadkach wesprzeć stosownymi doświadczeniami. Nie należy więc lekceważyć części doświadczalnej naszego zadania.

No, ale dość już przestróg i morałów. Życząc sukcesów zostawiam Was sam na sam z problemem: dlaczego wschodzące i zachodzące Słońce i Księżyc widzimy z Ziemi większe niż wysoko nad horyzontem? A redakcja *Delty* czeka na Wasze listy.

Czytelnicy proponują

W artykule „Atraktor i koza" (*Delta* 7/1982) Irena Kozłowska obliczała długość sznurka, na którym ma być uwiązana koza. Drugi koniec sznurka jest zamocowany na brzegu kolistego pastwiska, a dokładnie połowa pastwiska ma być w zasięgu kozy. Wynik (przy promieniu koła 1) jest granicą ciągu x_n, gdzie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, a

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4}\arccos\frac{x}{2}\right).$$

Autorka oblicza tę granicę za pomocą kalkulatora „najlepiej programowanego". Ciąg jest bowiem zbieżny wolno i dopiero siedemdziesiąty piąty wyraz daje nam osiem cyfr znaczących.

Czytelnik z Jeleniej Góry p. Adolf Łuczycki proponuje inną metodę znalezienia wyniku. Po pewnych modyfikacjach wygląda ona tak. Obliczamy, jaka część pastwiska jest w zasięgu kozy (w zależności od długości sznurka)

$$p(s) = \frac{1}{\pi}\left(2\arcsin\frac{s}{2} - s\sqrt{1-\frac{s^2}{4}} - s^2\arccos\frac{s}{2}\right).$$

Oczywiście p jest funkcją rosnącą. Oznaczmy $s_1 = 1$, $s_2 = \sqrt{2}$, $p_1 = p(s_1)$; $p_2 = p(s_2)$. Oczywiście $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$.

Określamy teraz $s_3 = \dfrac{s_2-s_1}{p_2-p_1}\left(\dfrac{1}{2} - p_1\right) + s_1$ (zwykła interpolacja liniowa) i $p_3 = p(s_3)$.

Wstawiamy teraz s_3 i p_3 na miejsce s_1 i p_1, jeśli $p_1 < \frac{1}{2}$ i na miejsce s_2 i p_2, jeśli $p_2 \geqslant \frac{1}{2}$ i powtarzamy powyższą procedurę.

Okazuje się, że już szósty wyraz ciągu daje osiem cyfr znaczących. (Pozostawiamy Czytelnikom udowodnienie, że ciąg s_n jest zbieżny do szukanej długości sznurka).

Kalkulatorem programowanym wygodniej jest liczyć pierwszą metodą (znacznie krótszy program), mimo że czas pracy kalkulatora jest około dziesięć razy dłuższy. Natomiast dla zwykłego kalkulatora przewaga drugiej metody jest wyraźna — dziesięciokrotnie mniej naciśnięć klawiszy.

J.R.

Rozwiązanie zadania M 355. Zauważmy wpierw, że dla każdego n mamy: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$.
Istotnie: $a_1 = 1 = 2-1 = a_3 - 1$, a przy założeniu, że równość nasza jest prawdziwa dla pewnego n mamy:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} = a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1,$$

co kończy dowód indukcyjny.
Mamy teraz:

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-2} + a_{n+k-1} + a_{n+k} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-2} + a_{n+k+1} > a_{n+k+1}$$

(bo $k > 2$),

równocześnie

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \leqslant a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} = a_{n+k+2} - 1,$$

a więc

$$a_{n+k+1} < S_{n,k} < a_{n+k+2},$$

ponieważ ciąg Fibonacciego jest monotoniczny, $S_{n,k}$ nie może być jego wyrazem c.n.d.

Wyznaczanie mas gwiazd na podstawie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni

Mgr Joanna FILIPOWICZ

Albert Einstein w książce „O szczególnej i ogólnej teorii względności" wydanej w roku 1917 napisał: „Częstość drgań promieniowania atomu znajdującego się na powierzchni ciała niebieskiego będzie nieco mniejsza od częstości drgań promieniowania atomu tego samego pierwiastka znajdującego się w swobodnej przestrzeni (lub na powierzchni mniejszego ciała niebieskiego)".
Zastanówmy się nad możliwością wyznaczania mas gwiazd przy wykorzystaniu tego efektu.
Niech kwant promieniowania elektromagnetycznego wylatuje z izolowanego ciała niebieskiego o potencjale grawitacyjnym na powierzchni $\Phi = GM/R$, który znika w nieskończoności.
Kwant taki porusza się z prędkością światła c i w układzie związanym z drgającym atomem ma częstość ν_0. Zgodnie z relacją $E = mc^2 = h\nu_0$ wiążącą energię całkowitą E z masą m kwantowi takiemu można przypisać pewną wielkość $m = E/c^2$. Pole grawitacyjne opisane potencjałem Φ będzie oddziaływać na tę „masę". Aby więc wydostać się z potencjału Φ, kwant musi wykonać pracę równą różnicy energii potencjalnej na powierzchni ciała o masie M i energii potencjalnej

Temperatura efektywna T_{ef} — jest to taka temperatura, jaką miałoby ciało doskonale czarne tych samych rozmiarów i wypromieniowujące w jednostce czasu tę samą energię, co gwiazda. Całkowite natężenie promieniowania we wszystkich długościach fali E w jednostce czasu można wyrazić przez temperaturę efektywną: prawo Stefana-Boltzmanna

$E = \sigma T_{ef}^4$ (σ — stała Stefana-Boltzmanna).

Związek pomiędzy jasnością L i temperaturą efektywną T_{ef} jest postaci: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, gdzie R jest promieniem gwiazdy. Temperaturę efektywną i przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni gwiazdy wyznacza się badając jej widmo ciągłe. Również różnorodność widm liniowych spowodowana jest nie tyle różnorodnością składu chemicznego, ile odmiennymi warunkami powstawania widma (różnice temperatury i gęstości).

Zmiana poziomów energii atomu spowodowana wpływem jednorodnego, zewnętrznego pola elektrycznego o natężeniu E nosi nazwę zjawiska Starka. Zjawisko Starka zależy silnie od ciśnienia — im większe ciśnienie, tym linie silniej poszerzone, co w przypadku białych karłów ma istotne znaczenie.

Występowanie zjawiska Zeemana wywołane jest energią oddziaływania momentów magnetycznych z zewnętrznym polem magnetycznym. Istnienie tych momentów wiąże się po pierwsze z ruchem orbitalnym naładowanych elektronów. Poruszające się ładunki są równoważne prądom elektrycznym, z których każdy wytwarza moment magnetyczny proporcjonalny do momentu pędu odpowiedniego ruchu orbitalnego. Po wtóre elektrony mają moment magnetyczny związany z ich własnym momentem pędu (spinem elektronu), same przypominają pod tym względem małe magnesy.

W 1974 roku Gatewood wyznaczył masy każdego ze składników Syriusza korzystając z faktu, że jest to układ podwójny. Uzyskał on wyniki: $M_A = 2{,}03 \pm 0{,}11\ \mathrm{M}_\odot$, $M_B = 1{,}01 \pm 0{,}06\ \mathrm{M}_\odot$. Dla naszych rozważań szczególnie interesująca jest masa M_B — składnika będącego białym karłem. Jak widać z przytoczonych danych dokładność tej metody jest rzędu kilku procent, a więc znacznie większa niż przy wykorzystaniu efektu grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni.

w nieskończoności (równej 0). W efekcie zmniejsza on swą częstość do wartości ν. Kwant utraci energię $\Phi \cdot \frac{h\nu_0}{c^2} = \frac{GmM}{R} = h(\nu_0 - \nu)$ i dlatego obserwowana przez nas na Ziemi częstość będzie równa $\nu = \nu_0(1 - \Phi/c^2)$. Efekt ten nazwano grawitacyjnym przesunięciem ku czerwieni, gdyż zmniejszeniu częstości drgań odpowiada zwiększenie długości fali, a więc przesunięcie widma ku czerwieni. Wyrażając wielkość tego przesunięcia w jednostkach długości fali otrzymujemy: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{Rc^2} = z$.

W przypadku ziemskiego pola grawitacyjnego efekt ten został potwierdzony przez doświadczenie, przy czym stwierdzono zgodność z przytoczonymi tu wzorami przewidującymi wielkość przesunięcia ku czerwieni z dokładnością do 10%. Dla źródła promieniowania elektromagnetycznego znajdującego się na powierzchni Słońca względne przesunięcie ku czerwieni z wynosi: $2{,}115 \cdot 10^{-6}$. Dla dowolnego ciała niebieskiego, którego masa jest wyznaczana w jednostkach masy Słońca ($\mathrm{M}_\odot$) i promień w jednostkach promienia Słońca ($\mathrm{R}_\odot$), mamy więc: $z = 2{,}115 \cdot 10^{-6} \frac{M/\mathrm{M}_\odot}{R/\mathrm{R}_\odot}$

Powyższe rachunki zostały przeprowadzone bez uwzględnienia potencjału grawitacyjnego Ziemi, w którym to potencjale kwant przybywający z przestrzeni kosmicznej uzyskuje pewną energię. Łatwo jednak obliczyć, że wpływ ziemskiego pola grawitacyjnego jest bardzo mały, bowiem daje względne przesunięcie ku fioletowi równe: $z = 6{,}9 \cdot 10^{-10}$, co w zestawieniu z wielkością przesunięcia już choćby na powierzchni Słońca daje wkład zaniedbywalny.

Oczywiście, jak widać z przytoczonych wzorów, efekt przesunięcia ku czerwieni jest tym większy, im większy stosunek M/R, a więc im silniejsze pole grawitacyjne obiektu. Szczególnie dla białych karłów, dla których $\frac{M/\mathrm{M}_\odot}{R/\mathrm{R}_\odot}$ jest rzędu kilkudziesięciu, możliwe jest wyznaczenie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni z zadowalającą dokładnością. Przesunięcie to wyznacza się porównując widmo gwiazdy z widmem laboratoryjnym, tj. takim, w którym długości fali odpowiadają promieniowaniu w układzie związanym z drgającym atomem. Widmo laboratoryjne dla danego pierwiastka jest więc widmem porównania o dokładnie zdefiniowanych długościach fali odpowiadających liniom i względem niego wyznacza się przesunięcia z. W przypadku białych karłów bada się zwykle linie serii Balmera H_β, H_γ, H_δ, H_ε w celu wyznaczenia ich przesunięcia ku czerwieni, a ze znajomości z określa się M/R. Mając dodatkowo niezależną informację o promieniu gwiazdy np. ze znajomości jasności i temperatury efektywnej T_{ef} lub niezależne oszacowanie przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni gwiazdy można wyznaczyć jej masę M.

Wyznaczenie stosunku $\Delta\lambda/\lambda$ jest problemem trudnym i to z wielu powodów. Przede wszystkim linie widmowe mogą być poszerzone i zniekształcone przez szereg efektów, jak rotacja ewentualnie pulsacja gwiazdy, występowanie pól elektrycznych i magnetycznych w jej wnętrzu (efekt Starka i Zeemana), czy wreszcie poszerzenie ciśnieniowe. Dla linii poszerzonych i zniekształconych często trudno wyznaczyć długość fali. Ponadto ruch gwiazdy w przestrzeni może dawać niezaniedbywalny wkład do przesunięcia linii. W badaniach eliminuje się więc ruch Słońca i ruch Galaktyki, a prędkości radialne gwiazd (tylko składowa radialna prędkości ma wpływ na wygląd widma) wyznacza się metodami statystycznymi.

W 1954 r. Popper badał białego karła 40EriB. Wyznaczył on przesunięcie w kierunku czerwieni $z = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$, co odpowiada $\frac{M/\mathrm{M}_\odot}{R/\mathrm{R}_\odot} = 33{,}1$. Promień tej gwiazdy jest równy $R = 0{,}0132\ \mathrm{R}_\odot$, a więc jej masa $M = 0{,}44\ \mathrm{M}_\odot$. Wynik ten został potwierdzony w 1971 r. przez Shipmana, który wyznaczył przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni oraz wartość przesunięcia ku czerwieni. Obliczona przez niego masa 40EriB jest równa $M = 0{,}45 \pm 0{,}13\ \mathrm{M}_\odot$. Ponadto wykonano szereg pomiarów dla obiektów, dla których prędkości radialne można było wyznaczyć statystycznie — np. dla otwartych gromad gwiazd, jak Hiady czy Plejady. W takich przypadkach wyznacza się średnie dopplerowskie przesunięcia ku czerwieni dla całej gromady gwiazd, a następnie dla znanych wartości promieni określa się masy poszczególnych składników.

Opisana metoda jest jedynym obserwacyjnym sposobem wyznaczania mas gwiazd nie będących składnikami układów podwójnych i oczywiście mających odpowiednio silne pole grawitacyjne na powierzchni. Szereg badań przeprowadzono jednak dla obiektów, dla których masy można było wyznaczyć w inny sposób. Okazuje się, że masy wyznaczone na podstawie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni są, w granicach błędów tej metody, zgodne z masami otrzymywanymi przy wykorzystaniu innych metod. Jako przykład posłużyć może Syriusz — najjaśniejsza gwiazda nieba północnego. Jest to układ podwójny, dla którego korzystając z praw mechaniki Newtona można z dużą dokładnością wyznaczyć masy każdego ze składników. Jednocześnie gwiazda słabsza — Syriusz B jest białym karłem i dla niego wyznaczono niezależnie masę korzystając z efektu grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni. Masa wyznaczona ze znajomości z jest obarczona znacznie większym błędem (kilkadziesiąt procent), ale w granicach tego błędu otrzymuje się zgodne wyniki, tj. $M = 1\ \mathrm{M}_\odot$.