Soczewka wielka jak niebo

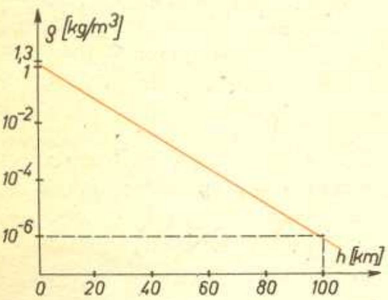
Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

Ile gwiazd na idealnie czystym niebie można nocą zobaczyć z Ziemi nieuzbrojonym okiem?

Nie męcz się, Czytelniku, z liczeniem, bowiem ścisła odpowiedź brzmi: ani jednej. Rzecz w tym, że z Ziemi żaden człowiek nie może patrzeć na gwiazdy bez przyrządu. Obserwuje on bowiem gwiazdy przez naturalną soczewkę, która zasłania mu całe niebo. A stanowi ją nasza, ziemska atmosfera.

Aby to sobie uzmysłowić, warto odpowiedzieć na dwa pytania: 1° jak atmosfera ziemska działa na przechodzące przez nią światło ciał niebieskich? oraz 2° czy to jej działanie da się sprowadzić do działania soczewki (i jakiej)?

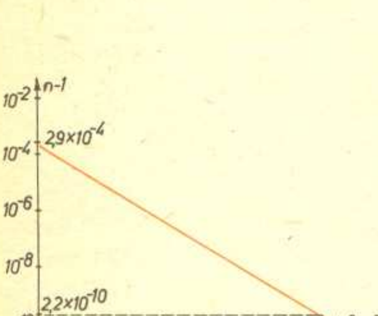
Atmosfera ziemska to kulista warstwa powietrza otaczająca Ziemię. Jej gęstość przy powierzchni Ziemi wynosi średnio około 1,3 kg/m^3 i szybko maleje wraz z wysokością nad poziomem morza (rys. 1). Znikome resztki atmosfery można wprawdzie stwierdzić nawet na wysokości do 3000 km, ale prawie cała masa atmosfery (99%) zawarta jest w najniższej powłoce o grubości ok. 35 km.



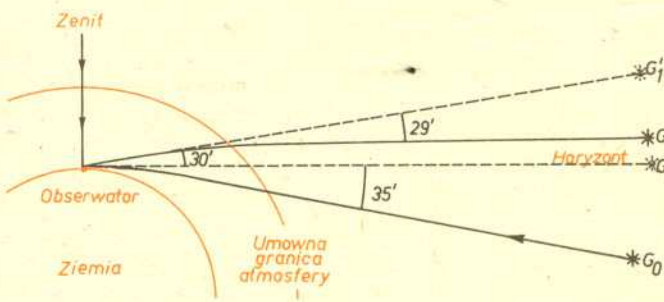
Rys. 1. Zależność gęstości ϱ atmosfery ziemskiej od wysokości h nad poziomem morza (w skali jak na rysunku zależność tę można z dobrym przybliżeniem traktować jako liniową).

Współczynnik załamania gazów (względem próżni) jest rosnącą funkcją gęstości. Dla powietrza atmosferycznego można tę funkcję wystarczająco dokładnie przybliżyć funkcją liniową postaci: $n = 1 + A\varrho$, gdzie n — współczynnik załamania powietrza, ϱ — jego gęstość, $A \approx 2{,}2 \cdot 10^{-4}\ m^3/kg$. Z optycznego punktu widzenia atmosfera ziemska jest więc warstwą ośrodka o bardzo niewielkim współczynniku załamania światła, malejącym wraz z wysokością (rys. 2). Jak taka niejednorodna warstwa działa na przechodzące przez nią światło?

Kiedy promień świetlny przechodzi przez granicę między dwoma jednorodnymi ośrodkami o różnym współczynniku załamania (rys. 3a), wówczas skokowo zmienia swój kierunek. Kiedy promień świetlny przechodzi przez kilka warstw jednorodnych o innym współczynniku załamania każda (rys. 3b), wówczas zmienia swój kierunek na każdej granicy między warstwami. Kiedy promień świetlny biegnie przez niejednorodny ośrodek o płynnie zmieniającym się współczynniku załamania (rys. 3c), wówczas zakrzywia się także w sposób płynny. Zjawisko to nosi nazwę refrakcji.

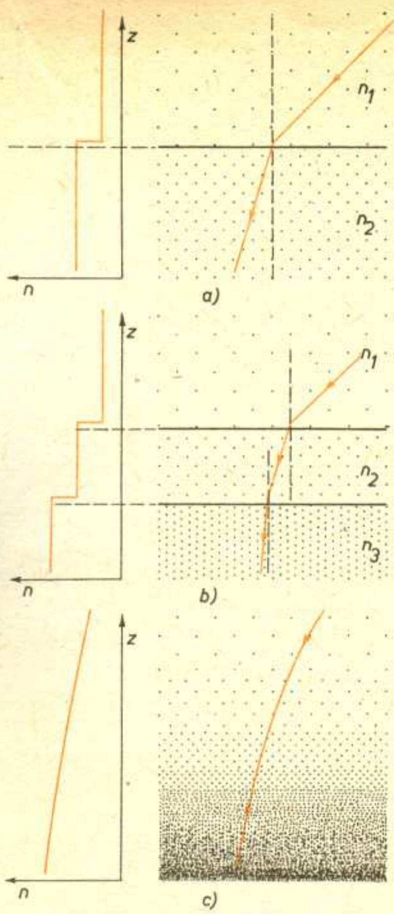


Rys. 2. Zależność bezwzględnego współczynnika załamania światła n atmosfery ziemskiej od wysokości h nad poziomem morza (w skali jak na rysunku zależność tę dobrze przybliża linia prosta).



Rys. 4. Refrakcja światła w atmosferze ziemskiej (w przesadzie i bez zachowania skali), powodująca, że obserwator na Ziemi widzi gwiazdy na niebie wyżej niż w rzeczywistości.

Podobnie zakrzywia swój tor światło biegnące przez atmosferę ziemską (rys. 4). Kąt między promieniem docierającym do obserwatora na powierzchni Ziemi a promieniem docierającym do atmosfery nosi nazwę kąta refrakcji. Kąt refrakcji jest tym większy, im dłuższą drogę przebywa promień świetlny w atmosferze. Dla promienia docierającego do obserwatora (na powierzchni Ziemi) w płaszczyźnie horyzontu kąt refrakcji wynosi 35′. Dla promieni docierających do obserwatora pod coraz większym kątem do płaszczyzny horyzontu kąt refrakcji maleje.



Rys. 3. Załamanie światła na granicy dwóch ośrodków jednorodnych optycznie (a) przy przejściu przez kilka warstw takich ośrodków (b) i przy przejściu przez ośrodek optycznie niejednorodny (o płynnie zmieniającym się współczynniku załamania) (c). Pionowe wykresy po lewej stronie każdego rysunku obrazują zależność współczynnika załamania *n* od miejsca w ośrodku.

Promieniowi, który z płaszczyzną horyzontu tworzy w punkcie, gdzie znajduje się obserwator, kąt 30′ (tyle mniej więcej wynosi widoczna z Ziemi średnica kątowa Słońca), odpowiada kąt refrakcji wynoszący około 29′; promień docierający do obserwatora z zenitu refrakcji już nie ulega wcale.

Istotnie, wskutek refrakcji w atmosferze nie możemy z Ziemi patrzeć na niebo nieuzbrojonym okiem. Oko nasze jest bowiem zawsze „uzbrojone w atmosferę ziemską", którą jakościowo możemy traktować jako specyficzną soczewkę płasko-wypukłą (czy ilościowo też? — ten niewątpliwie interesujący problem pozostawiam dociekliwemu Czytelnikowi). Jej specyfika polega — po pierwsze — na tym, że nie ma ona ostro określonej powierzchni wypukłej; po drugie, jest „wykonana" z materiału optycznie niejednorodnego (rys. 2); po trzecie wreszcie, na niebo patrzymy nie przez tę soczewkę, ale z jej wnętrza. Dodać by jeszcze należało, że wszystkie dane, które podaliśmy wyżej, mają charakter danych średnich. Aktualne własności naszej soczewki w znacznej mierze mogą zależeć od stanu atmosfery nad naszymi głowami.

Czy soczewka atmosferyczna ma istotne znaczenie dla obserwacji zjawisk na niebie z Ziemi? Oto trzy przykłady różnych zagadnień, których analiza pozwoli, mam nadzieję, uzasadnić odpowiedź twierdzącą na to pytanie.

Wróćmy najpierw do pytania z początku naszych rozważań. Wyobraźmy sobie, że ten sam fragment nieba obserwujemy z Księżyca (gdzie nie ma atmosfery) i z Ziemi. Obserwator na Księżycu policzył gwiazdy na niebie, po czym przenosi się na Ziemię i znowu liczy gwiazdy (niebo nad nim jest idealnie czyste). Czy zobaczy więcej, czy mniej gwiazd niż z Księżyca? Wskutek refrakcji w atmosferze ziemskiej widzimy z Ziemi gwiazdy, które dla obserwatora księżycowego są pod horyzontem (rys. 4), czyli z Ziemi możemy zobaczyć gwiazd więcej. Czy trochę więcej, czy też — znacznie więcej? Sądzę, że Czytelnik, posługując się podanymi uprzednio informacjami, sam już dojdzie do wniosku, że wpływ soczewki atmosferycznej na wynik liczenia gwiazd na niebie jest znikomo mały.

Czy można go jednak pominąć, gdy wyznaczamy kątowe odległości między gwiazdami, zwłaszcza takimi, które możemy obserwować jedynie nisko nad horyzontem?
Negatywną odpowiedź znajdzie Czytelnik z łatwością rozwiązując następujące zadanie: obserwator na powierzchni Ziemi widzi dwie gwiazdy, z których jedna znajduje się w płaszczyźnie horyzontu, druga zaś — 30′ nad horyzontem. Ile wynosi faktyczna odległość kątowa między tymi gwiazdami (zakładamy, że odległość do gwiazd jest nieskończenie wielka w porównaniu z rozmiarami Ziemi i jej atmosfery)?

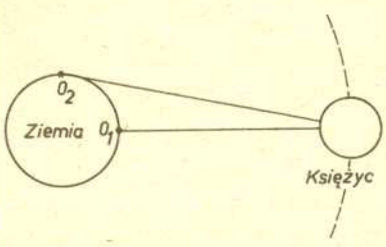
Trzeciego przykładu dostarcza nam wschodzące lub zachodzące Słońce lub Księżyc. Otóż ich tarcza jest wyraźnie spłaszczona w stosunku do sytuacji, kiedy są wysoko nad horyzontem. To także wynik refrakcji światła słonecznego w atmosferze. Czytelnik, który rozwiązał proponowane wyżej zadanie z parą gwiazd, nie powinien mieć kłopotów z rozwiązaniem następującego: o ile zmniejsza się pionowa średnica kątowa widzianego z Ziemi Słońca, którego tarcza dotyka właśnie swym dolnym punktem granicy horyzontu, w porównaniu ze Słońcem w zenicie (kiedy to kątowa średnica Słońca wynosi około 30′)?

Tu jednak Czytelnik może mieć wątpliwości. Bowiem wschodzące lub zachodzące Słońce i Księżyc są nie tylko spłaszczone, ale też wyraźnie większe niż wysoko nad horyzontem.
W tym miejscu chciałbym zaproponować Czytelnikowi, by wątpliwości te spróbował rozstrzygnąć samodzielnie, a następnie podzielił się wynikami swych dociekań z innymi za pośrednictwem naszego pisma.

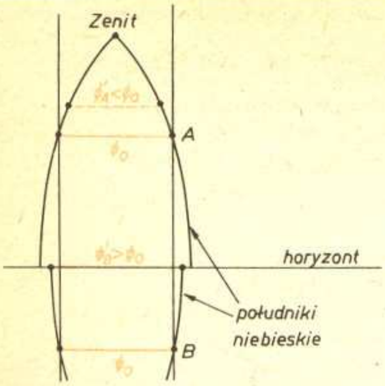
Osobiście zadanie podzieliłbym na dwie części: doświadczalną i teoretyczną. W części doświadczalnej starałbym się przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie: czy obserwowane przez nas zwiększenie tarczy Słońca (czy Księżyca) jest obiektywnym faktem, czy tylko złudzeniem? W tym celu oko należałoby zastąpić jakimś przyrządem, który nie ulega złudzeniom optycznym — na przykład aparatem fotograficznym. Sekwencja zdjęć Słońca (lub Księżyca) podczas wschodu i po nim (lub przed i podczas zachodu) powinna stanowić wystarczająco wymowny materiał doświadczalny, pozwalający odpowiedzieć na powyższe pytanie.

Część teoretyczną można generalnie zatytułować „Dlaczego?" Innymi słowy, chodziłoby w niej o sporządzenie listy wszelkich możliwych mechanizmów, które warunkują obserwowane zmiany rozmiarów kątowych tarczy słonecznej, a następnie — o ocenę ich roli. Oto przykładowe pozycje takiej listy, które przytaczam nie tyle jako podpowiedzi, ile jako *advocatus diaboli*:

1° gdyby Księżyc obiegał środek Ziemi po okręgu, to w chwilach wschodu i zachodu znajdowałby się dalej od obserwatora na Ziemi niż w chwili przechodzenia przez zenit, przez co obserwator widziałby wschodzący i zachodzący Księżyc mniejszy niż wysoko na niebie (rys. 5); czy ma znaczenie fakt, że ciała niebieskie poruszają się po orbitach eliptycznych? czy istotne jest, że jedno obiega nie drugie, ale — ich wspólny środek masy? czy efekty te są istotne w przypadku Słońca widzianego z Ziemi?



Rys. 5. Księżyc jest bliżej ziemskiego obserwatora widzącego go w zenicie (O_1), niż obserwatora widzącego go podczas wschodu lub zachodu (O_2) (na rysunku nie zachowano skali).



Rys. 6. Refrakcja w atmosferze sprawia, że średnicę kątową Φ_0 obiektu niebieskiego obserwator ziemski zobaczy bądź jako mniejszą (Φ'_A), bądź jako większą (Φ'_B) — zależnie od tego, czy obiekt w rzeczywistości jest nad (A), czy pod horyzontem (B) (rysunek mocno przesadzony).

2° ze względu na symetrię soczewki atmosferycznej (osią symetrii jest prosta przechodząca przez zenit) refrakcja światła w atmosferze powoduje pozorne podniesienie ciał niebieskich jedynie wzdłuż południków niebieskich (kół wielkich na niebie przecinających się w zenicie — rys. 6), skutkiem czego Słońce znajdujące się faktycznie (tzn. bez uwzględnienia refrakcji) nad horyzontem musi obserwator ziemski widzieć jako mniejsze (dokładniej: węższe), a jako szersze widzi je tylko w tym krótkim okresie, który upływa od chwili jego faktycznego przejścia przez płaszczyznę horyzontu do momentu widzianego z Ziemi zachodu (podobnie przy wschodzie); czy to ma istotne znaczenie?

3° wschodzące lub zachodzące Słońce i Księżyc świecą słabiej i mają inną barwę (to zasługa rozpraszania światła słonecznego i księżycowego w atmosferze); czy ma tu miejsce (a jeśli tak, to czy jest istotne) złudzenie optyczne polegające na pozornej zmianie rozmiarów źródła światła przy zmianie jego barwy lub (i) jasności? czy ważna może tu być zmiana jasności nieba?

Jak wynika z powyższych przykładów, nie wszystkie czynniki na naszej liście dadzą się zanalizować ściśle (ilościowo). Dlatego racjonalizm warto w takich przypadkach wesprzeć stosownymi doświadczeniami. Nie należy więc lekceważyć części doświadczalnej naszego zadania.

No, ale dość już przestróg i morałów. Życząc sukcesów zostawiam Was sam na sam z problemem: dlaczego wschodzące i zachodzące Słońce i Księżyc widzimy z Ziemi większe niż wysoko nad horyzontem? A redakcja *Delty* czeka na Wasze listy.

Czytelnicy proponują

W artykule „Atraktor i koza" (*Delta* 7/1982) Irena Kozłowska obliczała długość sznurka, na którym ma być uwiązana koza. Drugi koniec sznurka jest zamocowany na brzegu kolistego pastwiska, a dokładnie połowa pastwiska ma być w zasięgu kozy. Wynik (przy promieniu koła 1) jest granicą ciągu x_n, gdzie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, a

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4}\arccos\frac{x}{2}\right).$$

Autorka oblicza tę granicę za pomocą kalkulatora „najlepiej programowanego". Ciąg jest bowiem zbieżny wolno i dopiero siedemdziesiąty piąty wyraz daje nam osiem cyfr znaczących.

Czytelnik z Jeleniej Góry p. Adolf Łuczycki proponuje inną metodę znalezienia wyniku. Po pewnych modyfikacjach wygląda ona tak. Obliczamy, jaka część pastwiska jest w zasięgu kozy (w zależności od długości sznurka)

$$p(s) = \frac{1}{\pi}\left(2\arcsin\frac{s}{2} - s\sqrt{1-\frac{s^2}{4}} - s^2\arccos\frac{s}{2}\right).$$

Oczywiście p jest funkcją rosnącą. Oznaczmy $s_1 = 1$, $s_2 = \sqrt{2}$, $p_1 = p(s_1)$; $p_2 = p(s_2)$. Oczywiście $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$.

Określamy teraz $s_3 = \dfrac{s_2 - s_1}{p_2 - p_1}\left(\dfrac{1}{2} - p_1\right) + s_1$ (zwykła interpolacja liniowa) i $p_3 = p(s_3)$.

Wstawiamy teraz s_3 i p_3 na miejsce s_1 i p_1, jeśli $p_1 < \frac{1}{2}$ i na miejsce s_2 i p_2, jeśli $p_2 \geqslant \frac{1}{2}$ i powtarzamy powyższą procedurę.

Okazuje się, że już szósty wyraz ciągu daje osiem cyfr znaczących. (Pozostawiamy Czytelnikom udowodnienie, że ciąg s_n jest zbieżny do szukanej długości sznurka).

Kalkulatorem programowanym wygodniej jest liczyć pierwszą metodą (znacznie krótszy program), mimo że czas pracy kalkulatora jest około dziesięć razy dłuższy. Natomiast dla zwykłego kalkulatora przewaga drugiej metody jest wyraźna — dziesięciokrotnie mniej naciśnięć klawiszy.

J.R.

Rozwiązanie zadania M 355. Zauważmy wpierw, że dla każdego n mamy: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$.
Istotnie: $a_1 = 1 = 2 - 1 = a_3 - 1$, a przy założeniu, że równość nasza jest prawdziwa dla pewnego n mamy:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} = a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1,$$

co kończy dowód indukcyjny.
Mamy teraz:

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-2} + a_{n+k-1} + a_{n+k} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-2} + a_{n+k+1} > a_{n+k+1}$$

(bo $k > 2$),

równocześnie

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \leqslant a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} = a_{n+k+2} - 1,$$

a więc

$$a_{n+k+1} < S_{n,k} < a_{n+k+2},$$

ponieważ ciąg Fibonacciego jest monotoniczny, $S_{n,k}$ nie może być jego wyrazem c.n.d.

Wyznaczanie mas gwiazd na podstawie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni

Mgr Joanna FILIPOWICZ

Albert Einstein w książce „O szczególnej i ogólnej teorii względności" wydanej w roku 1917 napisał: „Częstość drgań promieniowania atomu znajdującego się na powierzchni ciała niebieskiego będzie nieco mniejsza od częstości drgań promieniowania atomu tego samego pierwiastka znajdującego się w swobodnej przestrzeni (lub na powierzchni mniejszego ciała niebieskiego)".
Zastanówmy się nad możliwością wyznaczania mas gwiazd przy wykorzystaniu tego efektu.
Niech kwant promieniowania elektromagnetycznego wylatuje z izolowanego ciała niebieskiego o potencjale grawitacyjnym na powierzchni $\Phi = GM/R$, który znika w nieskończoności.
Kwant taki porusza się z prędkością światła c i w układzie związanym z drgającym atomem ma częstość ν_0. Zgodnie z relacją $E = mc^2 = h\nu_0$ wiążącą energię całkowitą E z masą m kwantowi takiemu można przypisać pewną wielkość $m = E/c^2$. Pole grawitacyjne opisane potencjałem Φ będzie oddziaływać na tę „masę". Aby więc wydostać się z potencjału Φ, kwant musi wykonać pracę równą różnicy energii potencjalnej na powierzchni ciała o masie M i energii potencjalnej