Paradoks czasu czekania

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

Weźmy na wstępie pod uwagę model zajezdni autobusowej. Nie popełnimy znaczących niedokładności przyjmując, że autobusy podjeżdżają na przystanek w całkowitych minutach. Powszechnie ceni się deterministyczne rozkłady jazdy, dla nas takie modele nie są interesujące. Zajmiemy się rozkładami jazdy zależnymi od przypadku, a wśród nich modelem czysto losowym, wcale nie najgorszym.

W dalszym ciągu przyjazd autobusu nazywamy sygnałem. Chwile sygnałów kładziemy na osi czasu tworząc tym samym strumień sygnałów. Rozważać będziemy odstępy czasu między sygnałami i czas czekania na sygnał począwszy od określonej chwili.

Model czysto losowy. Przypuśćmy, że sygnał pojawia się w chwili $i = 0$, natomiast chwilami pojawienia się dalszych sygnałów rządzi pewien ciąg prób Bernoulliego. Ciąg ten stanowią próby niezależne, w których możliwe są tylko dwa wyniki i ich prawdopodobieństwa pozostają te same przez cały czas prób. Dla ustalenia uwagi możemy przy tym myśleć o serii rzutów asymetryczną monetą, o prawdopodobieństwie orła (sukces) równym p i prawdopodobieństwie reszki (porażka) równym $q = 1-p$. Mówimy, że w strumieniu sygnałów w danej chwili pojawia się sygnał, jeśli w odpowiednim miejscu w ciągu prób Bernoulliego zdarza się sukces, nie ma sygnału w przeciwnym razie.

Weźmy pod uwagę zmienną losową X określoną jako odstęp czasu między kolejnymi sygnałami. Ma ona rozkład prawdopodobieństwa zwany rozkładem geometrycznym

$$p_k = Pr(X = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Średnia długość odstępu, zdefiniowana wzorem $\mu = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots$ jest równa $1/p$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2},$$

$$\text{a więc } \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Niech i będzie ustaloną chwilą oraz Y_i będzie czasem czekania na pierwszy sygnał po chwili i. Tym samym przyjmujemy, że pasażer nie może odjechać bez czekania, nawet jeżeli przyjście na przystanek i odjazd autobusu następują w tej samej chwili. Zmienną losową Y_i nazwiemy czasem resztowym. Z opisu ciągu prób Bernoulliego wynika, że czas resztowy nie zależy od czasu, jaki upłynął do chwili i od chwili poprzedniego sygnału i ma taki sam rozkład jak zmienna losowa X czasu od sygnału do sygnału.

Model można rozważać nieco inaczej, a wniosek będzie dalej idący. Aby uwolnić się od zakłócenia wywołanego początkiem czasu, rozważmy ciąg prób Bernoulliego ponumerowanych liczbami całkowitymi, a więc rozważmy ciąg sygnałów rozciągniętych na wszystkie liczby całkowite nie wyróżniając sygnałem chwili $i = 0$. Niech Z_i oznacza czas, jaki upłynął do chwili i od chwili poprzedniego sygnału ($Z_i = 0$, jeśli w chwili i zdarzył się sygnał). Teraz łatwo zauważyć, że zmienna losowa Z_i ma rozkład prawdopodobieństwa $Pr(Z_i = k) = q^k p$, $k = 0, 1, \ldots$, z wartością oczekiwaną $(1/p) - 1$, oraz zmienne losowe Z_i i Y_i są niezależne.

Paradoksalny jest fakt, że jakkolwiek wszystkie odstępy między kolejnymi sygnałami mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa z wartością średnią $1/p$, to chwila i wybrana dowolnie znajduje się w odstępie o rozkładzie prawdopodobieństwa z wartością średnią $(2/p) - 1$.

Model ogólny. Rozważmy teraz model łączący cechy modelu deterministycznego i losowego. Przyjmijmy, że odstęp między n-tym i $n+1$-szym sygnałem jest zmienną losową X_n o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa $p_k = Pr(X_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, niezależnym od n. Ponadto załóżmy, że wszystkie zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne. Wartość średnia odstępu zdefiniowana jak poprzednio niech będzie skończona.

Niech u_i oznacza prawdopodobieństwo sygnału w chwili i. Prawdopodobieństwa u_i, $i = 0, 1, \ldots$, spełniają równanie rekurencyjne

$$(1) \qquad \begin{aligned} &u_0 = 1, \\ &u_i = u_0 p_i + u_1 p_{i-1} + \ldots + u_{i-1} p_1, \qquad i = 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

Przy dowodzie tych zależności wystarczy zauważyć, że ostatni sygnał przed chwilą i może się zdarzyć w chwili $0, 1, \ldots, i-1$, skorzystać z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i założeń dotyczących odstępów między sygnałami.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_i, zdefiniowanej jak poprzednio, możemy przedstawić następująco

$$(2) \qquad Pr(Y_i = k) = p_{i+k} + u_1 p_{i-1+k} + u_2 p_{i-2+k} + \ldots + u_i p_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Równanie (1) nazywa się równaniem odnowy i ma znaczenie w teorii odnowy i teorii niezawodności. Tamże X_n interpretuje się jako czas pracy pewnego elementu, a chwile sygnałów są chwilami elementów kończących pracę. W przypadku geometrycznego rozkładu czasu pracy elementu mamy $u_i = 1/\mu$ dla $i = 1, 2, \ldots$, w innych przypadkach obserwuje się charakterystyczne zanikające oscylacje ciągu.

Interesująca jest asymptotyka u_i przy $i \to \infty$. Otóż, jeżeli dla pewnego N mamy $u_i > 0$ dla $i > N$, to istnieje granica $\lim_{i \to \infty} u_i = 1/\mu$. Ten fakt może być wykorzystany do znalezienia rozkładu granicznego czasu resztowego. Oczywiście prawdopodobieństwo p_{k+i} dąży do zera przy $i \to \infty$, znalezienie granicy pozostałych w (2) wyrazów nie jest natychmiastowe, bo rośnie liczba wyrazów tej sumy. Można pokazać elementarnie, że $u_i p_k + \ldots + u_1 p_{i-1+k} \to r_k/\mu$ gdy $i \to \infty$, gdzie $r_k = p_k + p_{k+1} \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$.

Rozkład prawdopodobieństwa $p_k^* = r_k/\mu$, $k = 1, 2, \ldots$ nazywa się granicznym rozkładem resztowym. Formalnie można go obliczyć dla każdego rozkładu o skończonej średniej.
W przypadku rozkładu geometrycznego rozkład resztowy jest taki sam. Rozkład deterministyczny $p_k = 1$ dla $k = m$ i $p_k = 0$ dla $k \neq m$ został wykluczony z rozważań na wstępie, nie jest także dopuszczalny do rozważań asymptotycznych teorii odnowy. Formalnie możemy jednak obliczyć: $p_k^* = 1/m$, $k = 1, 2, \ldots m$, $p_k^* = 0$, $k = m+1, m+2, \ldots$
Wartość średnia w rozkładzie deterministycznym jest równa m, natomiast w odpowiadającym mu rozkładzie resztowym jest mniejsza i wynosi $(m+1)/2$.

Graniczny resztowy rozkład prawdopodobieństwa ma ciekawe własności. Dla sformułowania jednej z nich potrzebne jest pojęcie wariancji. Wariancją zmiennej losowej X o rozkładzie p_k, $k = 1, 2, \ldots$, nazywamy liczbę

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \mu^2.$$

Teraz obliczymy średnią w rozkładzie p_k^*, $k = 1, 2, \ldots$.

$$(3) \quad \mu^* = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^* = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p_i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} k \right) p_i =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)}{2} p_i = \frac{1}{2\mu} (\delta^2 + \mu + \mu^2).$$

Paradoks. Można zapytać, czy istnieją rozkłady odstępów między sygnałami, dla których czasy resztowe są średnio większe. Odpowiedź wynika natychmiast ze wzoru (3), wszystko zależy od wariancji. Dla rozkładów prawdopodobieństwa bliskich deterministycznego (δ^2 małe) paradoks nie jest spodziewany. Istnieją jednakże rozkłady prawdopodobieństwa, dla których, przy danej średniej, wariancja jest dowolnie duża albo nieskończona. Wówczas odpowiedź na nasze pytanie jest twierdząca.

Najczęściej przy losowych rozkładach jazdy autobusów odpowiednie δ^2 jest duże. Wówczas nie ma racji osoba, która z żalem powiada, że uciekł jej autobus w chwili, gdy przyszła na przystanek. Jej średni czas czekania jest krótszy, aniżeli średni czas czekania osoby przychodzącej na przystanek w wybranym na chybił trafił momencie czasu.

(Intuicyjne wyjaśnienie paradoksu znajduje się w numerze.)

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 355. Przypomnijmy, że ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ dla } n \geqslant 2.$$

Wykazać, że dla $k \geqslant 3$ suma $S_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}$ nie może być liczbą Fibonacciego.

Rozwiązanie na str. 8

M 356. Średnicą D zbioru A nazywamy liczbę

$D(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$, gdzie $d(x,y)$ jest odległością x od y.

Punktem środkowym zbioru leżącego w przestrzeni euklidesowej nazywamy środek odcinka o końcach należących do A i długości $D(A)$.

Wykazać, że dla zbioru $S(A)$ wszystkich punktów środkowych zbioru A prawdziwa jest nierówność

$$D(S(A)) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} D(A)$$

i że oszacowania tego nie można poprawić.

Rozwiązanie na str. 2

M 357. Niech x będzie dowolną liczbą niewymierną. Wykazać, że istnieje takie $n < 1000$, że wśród ułamków o mianowniku n znajduje się ułamek przybliżający x z dokładnością $\frac{1}{1000\,n}$.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 148. a) W przewodzącym walcu W skupione jest pole magnetyczne (rys. a). Giętkie przewody łączą galwanometr G ze stykającymi się na powierzchni walca kontaktami ślizgowymi K_1 i K_2, które następnie przesuwają się po powierzchni bocznej walca aż do ponownego zetknięcia w położeniu K_1' i K_2'.

b) Walec miedziany wiruje w polu magnetycznym.

Do jego osi i powierzchni bocznej podłączony jest za pomocą szczotek czuły miernik (rys. b).

c) Metalowa ramka ABCD wiruje wokół przewodzącego magnesu walcowego i poprzez ślizgacze A i D tworzy obwód zamknięty.

Prawo indukcji elektromagnetycznej mówi, że siła elektromotoryczna indukcji w obwodzie

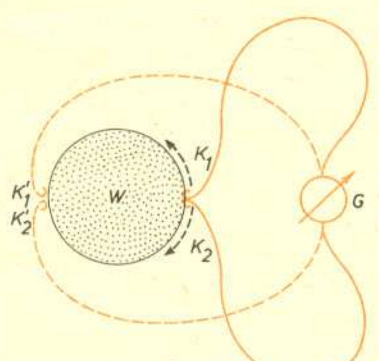
$$\varepsilon = -\mathrm{k} \frac{d\Phi}{dt}$$

jest proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego $\frac{d\Phi}{dt}$ obejmowanego przez obwód (k — współczynnik proporcjonalności zależny od układu jednostek).

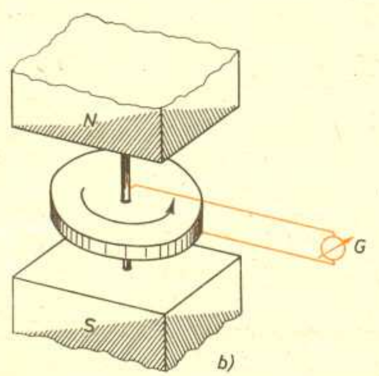
Zgodnie z tym prawem galwanometr w punkcie a) powinien zarejestrować przepływ prądu, a w obwodach z punktów b) i c) prądy nie powinny płynąć.

Czyżby tak było istotnie?

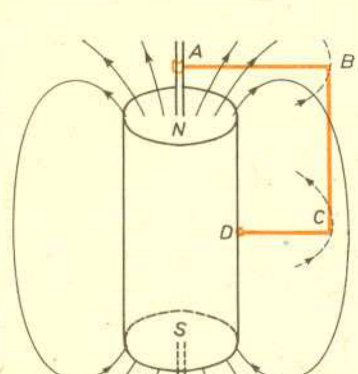
Rozwiązanie na str. 2



a)



b)



c)