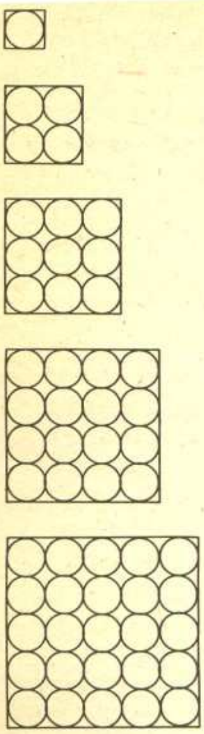
Kilka uwag historycznych o równaniach kwadratowych

Doc. dr Adam WACHUŁKA

„Najpierw było koniecznym i pożytecznym stworzyć środki pomocnicze dla naszej skłonności do czystego myślenia; dla tego geometrzy szukali tej pomocy w figurach, arytmetycy w liczbach, inni jeszcze w innych środkach".
Erazm Bartholin we wstępie do *Geometrii* Kartezjusza (1659 r.)

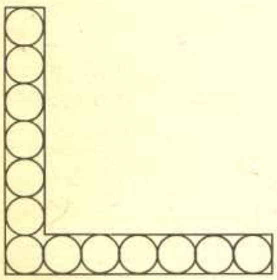
Człowiek od samego zarania myśli stykał się z koniecznością liczenia i jego wynikiem — liczbą. Była to oczywiście, jak dziś mówimy, liczba całkowita, dodatnia. Pierwszą w kolejności liczbą była jedynka, przed nią nie było „nic". Nie będę tu wchodził w to, jak te liczby oznaczano, nazywano i jak nimi operowano, choć są to niewątpliwie ciekawe zagadnienia.

Więcej uwagi liczbom i ich własnościom poświęcono w Szkole Pitagorejskiej około VI w.p.n.e. Spośród różnych własności liczb znanych Pitagorejczykom chcielibyśmy tu zwrócić uwagę na liczby kwadratowe, nazywać je będziemy krótko kwadratami. Były to takie liczby, że gdybyśmy jednostkę przedstawili w postaci małego kółka, ilość jednostek takiej liczby wypełniłaby pewien kwadrat (rys. 1).



Rys. 1. Liczby kwadratowe

Ponadto wyróżniali oni dla każdego kwadratu figurę „gnomon", składającą się z jednostkowego kwadratu i dwóch równych prostokątów (rys. 2).



Rys. 2. Gnomon

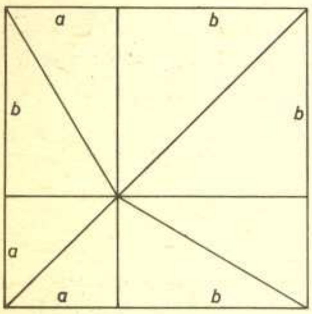
Dla liczby kwadratowej 1 gnomon wynosił $2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Dla liczby kwadratowej 4 gnomon wynosił $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Dla liczby kwadratowej 9 gnomon wynosił $2 \cdot 3 + 1 = 7$ itd.

Gnomon dołączony do odpowiedniej liczby kwadratowej dawał z nią razem następną liczbę kwadratową. Można to tak zapisać za pomocą oznaczeń literowych, których Grecy nie stosowali,

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Z biegiem czasu okazało się, że warto wprowadzić uogólniony gnomon, składający się z dowolnego kwadratu i dwóch odpowiednich, przystających prostokątów (rys. 3). Niech będzie dany kwadrat o boku a. Wyznaczamy na przedłużeniu boku a odcinek o długości b; z jego końca prowadzimy prostopadłą doń do przecięcia z przekątną kwadratu o boku a i uzupełniamy rysunek do kwadratu. Powstały tu gnomon da się zapisać w postaci $2ab + b^2$. Za pomocą oznaczeń literowych możemy rysunek 3 opisać w taki sposób:

$$a^2 + (2ab + b^2) = (a+b)^2.$$

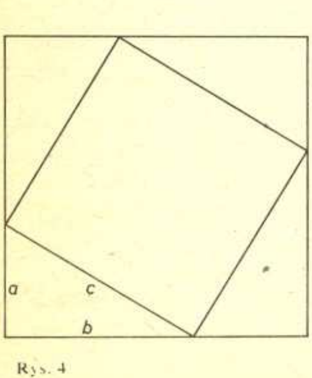


Rys. 3

Jest to dobrze nam znany wzór, który w szkole wyprowadzaliśmy mnożąc przez siebie sumę i redukując wyrazy podobne.

Prostokąty na rys. 3 dają się podzielić przekątnymi na dwa przystające trójkąty prostokątne. Pitagoras miał te trójkąty ułożyć w taki sposób, że wierzchołki kątów prostych pokryły się z wierzchołkami kwadratu, a przyprostokątne pokrywały boki kwadratu (rys. 4). W ten sposób powstał wewnątrz pierwszego kwadratu drugi kwadrat, którego bokiem jest przekątna prostokąta, czyli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, którą oznaczymy literą c. Kwadraty o boku $a+b$ na rys. 3 i 4 są równe. Cztery trójkąty na rys. 4 są równe dwóm prostokątom na rys. 3. Stąd wynika, że kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej jest równy sumie obu kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych. Jeżeli zachowamy wprowadzone przez nas oznaczenia literowe, zapiszemy otrzymany związek w postaci

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Rys. 4

Jest to twierdzenie znane pod nazwą twierdzenia Pitagorasa. Stanowiło ono wiekopomne odkrycie. Wydawało się niezwykle proste, a zarazem pełne treści, ale zawierało wiele ukrytych problemów, które niepokoiły Pitagorejczyków, a także wszystkich ich następców przez wiele stuleci. Mianowicie już dla trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnych długości 1 stwierdzono, że liczba kwadratów na przeciwprostokątnej wynosi 2, a ta liczba nie występuje wśród liczb kwadratowych. Nie ma więc liczby całkowitej, której odpowiadałaby liczba kwadratowa 2. Okazało się też, że gdy jednostkę podzielić na pewną liczbę równych części, przeciwprostokątna nie da się wyrazić w całkowitej liczbie tych części. Nie usunęło powstałych wątpliwości nawet i to, że Pitagoras wyprowadził pewne wyrażenia na boki

Paradoks, jak zwykle w matematyce, traci na ostrości przy dokładniejszym poznaniu zjawiska. Los konstruując strumień sygnałów czerpie odstępy z typowego zestawu (według zadanego rozkładu prawdopodobieństwa) i odkłada na osi czasu bez względu na ich długość. Gdy wariancja jest duża, losowane są odstępy zróżnicowane, małe i duże. Wejdźmy teraz w położenie osoby przychodzącej w chwili wybranej na chybił trafił na przystanek. Osoba ta inaczej losuje dla siebie odstęp między sygnałami, niestety, wpada raczej na odstępy dłuższe.

trójkąta prostokątnego, które w naszej symbolice dałyby się zapisać w taki sposób: najmniejsza przyprostokątna wynosi $2a+1$, druga $2a^2+2a$, przeciwprostokątna zaś $2a^2+2a+1$. Jeżeli w miejsce a będziemy podstawiać liczby całkowite, wyniki też będą liczbami całkowitymi.

Bardzo długo trwały dalsze badania, chyba aż do czasów George'a Cantora (1845—1918) i Richarda Dedekinda (1831—1916), którzy podali właściwe wyjaśnienie powstałej trudności, ale było to w 25 stuleci później. Może warto sobie to należycie uświadomić, aby zrozumieć, jakimi trudnościami jest najeżona droga prowadząca do matematycznego poznania.

Jednak przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o bokach jednostkowych istnieje jako odcinek i to jest niewątpliwe. Geometria grecka poprzestała więc na badaniu figur geometrycznych i operowaniu odcinkami, a realizowała to tak umiejętnie, że jej wyniki są przedmiotem zainteresowań dziś jeszcze i to nie tylko pod względem faktograficznym.

Morris Kline w artykule „Geometria" (por. „Matematyka w świecie współczesnym", Bibl. Problemów, PWN, Warszawa 1966) mówi tak: „Na przykład równanie algebraiczne drugiego stopnia o jednej niewiadomej (jak $x^2-8x+7=0$) rozwiązywano geometrycznie i rozwiązanie, które podał Euklides, nie było liczbą, lecz odcinkiem prostej. Zatem geometria euklidesowa obejmowała ówcześnie znaną algebrę". Zbadamy bliżej to sformułowanie i spróbujemy odtworzyć rozumowanie prowadzące do rozwiązania.

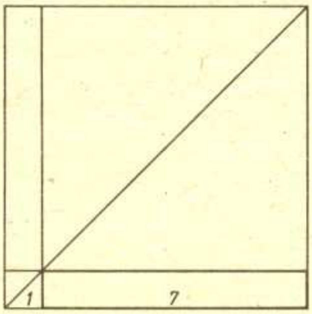
Przede wszystkim Euklides nie znał symboliki algebraicznej. Równanie w postaci $x^2-8x+7=0$ nie występuje w jego tekście. Mogło natomiast u niego występować takie zagadnienie: „Do jakiego kwadratu należy dodać prostokąt o bokach 7 i 1, aby powstał prostokąt o bokach równych 8 i bokowi szukanego kwadratu?". W naszej symbolice powstałoby równanie $x^2+7\cdot 1=8x$. Na rysunku 3 kwadrat o boku $a+b$ składa się właściwie z dwóch prostokątów, a każdy prostokąt znowu składa się z kwadratu i prostokąta. W oznaczeniach literowych, których, jak jeszcze raz podkreślamy, Grecy nie stosowali, można zapisać to w taki sposób:

$$(a^2+ab)+(b^2+ab)=(a+b)^2$$

lub

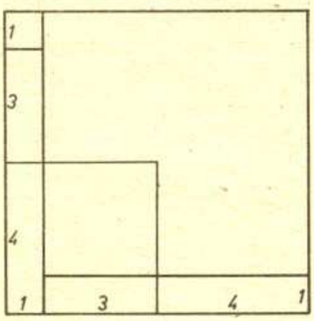
$$a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b)=(a+b)^2.$$

Nie znając wyrażeń algebraicznych nie mogli Grecy ich porównywać, tak jak zrobilibyśmy dziś. Wobec tego pozostało skonstruować podobnie jak na rys. 3 kwadrat z uwzględnieniem danych zadania (rys. 5).



Rys. 5

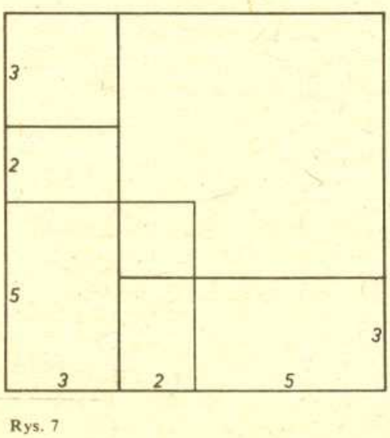
Budujemy prostokąt o bokach 7 i 1. Dołączamy do niego kwadrat o boku 1, prowadzimy jego przekątną itd., podobnie jak postępowaliśmy przy konstrukcji rysunku 3. Lewy prostokąt składa się z kwadratu 1×1 oraz z prostokąta 7×1 i ma boki równe odpowiednio 1 i 8, spełnia więc warunki zadania. Prawy prostokąt o bokach 7 i 8 składa się również z kwadratu 7×7 i z prostokąta 7×1, spełnia więc również warunki zadania. Otrzymaliśmy dwa rozwiązania. Można jednak rozwiązać to zadanie w nieco inny sposób. Liczba 7 da się napisać jako $2\cdot 3+1$, a więc jest to gnomon liczby kwadratowej 9 odpowiadającej liczbie 3. Następna liczba kwadratowa odpowiada liczbie 4, a więc połowie boku wymaganego prostokąta. Łatwo sprawdzić, że $4-3=1$, $4+3=7$, co stanowi rozwiązanie postawionego zadania (rys. 6). Ten drugi sposób zbliża nas już do reguł, którymi się dziś posługujemy, choć nie jest jeszcze tak ogólny.



Rys. 6

Jeszcze bardziej do naszego rozwiązania, choć też bez symboliki algebraicznej, zbliżył się matematyk arabski Muhammed ibn Musa Al'Chwarizmi, około r. 825, a więc w 11 stuleci po Euklidesie, w dziele pt: „Al-gebr w al mukabala". Dotarło ono do Europy później i około XII stulecia zostało przetłumaczone na język łaciński. Autor rozwiązuje tu w naszej symbolice równanie $x^2+21=10x$, zaś w terminologii geometrycznej zagadnienie: „Do jakiego kwadratu należy dodać prostokąt o polu 21, aby otrzymać prostokąt o bokach równych 10 i bokowi szukanego kwadratu".

Stosowanie tu gnomonu $21=2\cdot 10+1$ nie prowadzi do wyniku. Wyznaczymy wobec tego gnomon uogólniony dla kwadratu nie przewyższającego kwadratu 5^2 odpowiadającego połowie boku zadanego prostokąta. Uogólnionym gnomonem jest tu $21=2\cdot 2\cdot 3+3^2$, a więc gnomon odpowiadający liczbie kwadratowej 2^2. Wykonując działania jak w poprzednim przykładzie $5-2=3$ oraz $5+2=7$ otrzymujemy rozwiązanie. Autor formułuje regułę tę wyraźnie w takich słowach: „Podziel krotność szukanego boku na połowy, otrzymasz 5. Pomnóż to przez siebie $5\cdot 5=25$. Odejmij od tego wyraz wolny 21, otrzymasz $4=2\cdot 2$. Odejmij $5-2=3$, dodaj $5+2=7$. To są boki szukanego kwadratu. ... Pamiętaj, że gdy w zadaniu kwadrat połowy krotności jest mniejszy od wyrazu wolnego, rozwiązanie jest niemożliwe. Gdy zaś ten kwadrat jest równy wyrazowi wolnemu, wówczas rozwiązanie jest równe połowie krotności nieznanego boku". Na zastosowanie tej reguły podaje autor jeszcze inne przykłady. Regułę swoją uzasadnia na drodze geometrycznej (rys. 7). Algebra słowna matematyków Wschodu była więc, podobnie jak u Greków i niewątpliwie pod pewnym ich wpływem, uzasadniana geometrycznie.



Rys. 7