

### Przypominamy

Każdy, kto nadesłże pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania

## Mizar MSE (6)

Podaliśmy już ważniejsze rodzaje konstrukcji służących do budowy poprawnych i akceptowanych przez Mizar dowodów. Spróbujmy z podanej poprzednio aksjomatyki liniowego porządku dla ułamków wywieść takie zdanie:

```
FOR X EX Y ST NOT NWCX,YJ
```

Nie da się. Nic dziwnego — po prostu z tej aksjomatyki ono wcale nie wynika. Uzupełnijmy więc wstęp (environ) o następujące aksjomaty.

```
NIEOGRANICZONOSC: FOR X HOLDS (EX Y ST X(<)Y & NWCX,YJ) &
(EX Z ST X(>Z & NWCZ,XJ) &
```

```
PESTOSC: FOR X,Y ST X(<)Y & NWCX,YJ
EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ & X(>Z & Z(<)Y
```

Zacznijmy dowód z nadzieją, że nowe aksjomaty nam pomogą. Teza zaczyna się od ogólnego kwantyfikatora, więc:

```
PROOF
LET X* BE ULAMEK;
```

No i co dalej? Mamy teraz udowodnić, że  $ex\ y\ st\ not\ NW[x', y]$ . Naturalną drogą dowodzenia (wprost) takiego zdania jest wskazanie przykładu — obiektu, który zadośćczyni wymaganemu warunkowi. Ale skąd taki obiekt wziąć? Wprowadzone świeżo aksjomaty gwarantują nam istnienie pewnych obiektów o pewnych własnościach. Być może któryś z nich ma też takie własności, jakich poszukujemy dla wskazania przykładu. Spróbujmy:

```
A: EX Y ST X'(<)Y & NWCY,X'J BY NIEOGRANICZONOSC;
```

No dobrze, ale jak skorzystać z takiego faktu. Skoro mamy już gwarancję istnienia obiektów o pewnej własności, to możemy wybrać jeden z nich, jeden konkretny, i dla wygody nazwać go.

Mając taki obiekt już „w ręku” możemy posługiwać się nim w dalszym rozumowaniu jak stałą, o której już coś wiemy. Taki wybór zapisujemy w Mizarze

```
CONSIDER Y* SUCH THAT B: X'(<)Y* & NWCY*,X'J BY A;
```

No, a teraz mamy już pewną stałą i jak się okazuje tę, która była nam potrzebna.

```
NOT NWCX*,Y*J BY B,ANTYSYMETRIA;
HENCE EX Y ST NOT NWCX*,YJ
END;
```

Konstrukcja zaczynająca się od słowa *consider* (po polsku znaczy ono „rozważmy”, „weźmy pod uwagę” lub nieco luźniej „wybierzmy”) oznacza wybór i ustalenie do dalszych rozważań obiektu (stałej), który ma pewne własności, a fakt istnienia obiektów o takich własnościach przyjęto lub wykazano wcześniej. Zatem taki wybór obiektu przez *consider* wymaga uzasadnienia i może być nim jedynie powołanie się na przesłanki. (Uwaga. Po *consider* użycie *then* lub *hence* jest niedozwolone).

W następującym dowodzie zakładamy zdanie egzystencjalne (tzn. z kwantyfikatorem szczegółowym) i zaraz potem z niego korzystamy.

```
FOR X,Y ST (EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ) HOLDS NWCX,YJ
|PROOF
LET X*,Y* BE ULAMEK;
ASSUME EX Z ST NWCX*,ZJ & NWCZ,Y*J;
THEN CONSIDER Z* SUCH THAT A: NWCX*,Z*J & NWCZ*,Y*J;
THUS NWCX*,Y*J BY A,PRZECZODNIOSC
END;
```

To same możemy zrobić krócej:

```
FOR X,Y ST EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ HOLDS NWCX,YJ
PROOF
LET X*,Y* BE ULAMEK;
GIVEN Z* SUCH THAT A: NWCX*,Z*J & NWCZ*,Y*J;
THUS THESIS BY A,PRZECZODNIOSC
END;
```

Konstrukcja z *given* zastępuje założenie o istnieniu pewnych obiektów (*assume ex ...*) i następujący po nim wybór jednego z tych obiektów (*consider ...*) uzasadnionego przez to założenie (*then*). Zwrot *given ... such that ...* po polsku wyrażamy tak: dany jest ... taki, że ... Używanie *then* i *hence* po konstrukcji *given* jest niedozwolone. Zwróćmy uwagę: właśnie poznaliśmy jeszcze jeden sposób robienia założeń w dowodzie.

A teraz wróćmy do dowodzenia nie wprost zdań ogólnych, z którymi to dowodami w czwartym spotkaniu nie bardzo umieliśmy sobie poradzić. Teraz już umiemy skorzystać z negacji takiego zdania. Bo czymże ono jest? Jeszcze raz pokażemy, że spójność daje zwrotność; tym razem nie wprost.

```
FOR X HOLDS NWCX,XJ
PROOF
ASSUME NOT (FOR X HOLDS NWCX,XJ);
THEN EX X ST NOT NWCX,XJ;
THEN CONSIDER Y SUCH THAT A: NOT NWCY,YJ;
NWCY,YJ BY SPOJNOSC;
HENCE CONTRADICTION BY A
END;
```

Powyższy dowód można zapisać znacznie krócej:

```
FOR X HOLDS NWCX,XJ
PROOF
GIVEN X SUCH THAT A: NOT NWCX,XJ;
THUS CONTRADICTION BY A,SPOJNOSC
END;
```

### Zadania:

(Jak zwykle o naszych ułamkach).

```
T17: (EX X,Y,Z ST X(<)Y & Y(>Z) IMPLIES (EX X,Y ST X(<)Y)
T18: (EX X ST FOR Y HOLDS NWCX,YJ) IMPLIES (FOR X EX Y ST NWCY,XJ)
T19: FOR X,Y ST X(<)Y & NWCX,YJ
EX X',Y' ST NOT NWCX',X'J & NOT NWCY',Y'J
```

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI

OPIS CHECKERA W DELCIE 10 JEST BARDZO POBIEŻNY I ZAPEWNE CZYTELNICY ZAUWAŻYLI, ŻE POSTĘPUJĄC ZGODNIE Z OPISEM, NIEKTÓRYCH ZADAN ROZWIĄZAC NIE MOŻNA. PAN DARIUSZ DUHA UPROST NAPISAŁ, ŻE PODEJRZEWANA, IŻ CHECKER WYKORZYSTUJE JAKIEŚ DODATKOWE AKSJOMATY. ISTOTNIE TAK JEST.

ROWNOSC NIE PRZYPADKIEM OZNACZONA JEST INACZĘJ NIŻ POZOSTAŁE PREDYKATY I JEST ONA INACZĘJ TRAKTOWANA. CHECKER SPRAWDZAJĄC POPRAWNOŚĆ KROKÓW WNIOSKOWANIA SAH UWZGLĘDNIŁ, JAKO DODATKOWE PRZESŁANKI: ZWROTNOSC, SYMETRYCZNOŚĆ I PRZECZODNIOSC ROWNOSCI, A TAKŻE PRAWA EKSTENSIJONALNOŚĆ DLA NIEJ: JEŻELI JAKIEŚ ZDANIE, W KTÓRYM WYSTĘPUJE A, JEST PRAWDZIWIE, A A=B, TO PO ZASTAPIENIU A PRZEZ B, ZDANIE NADAL BĘDZIE PRAWDZIWIE.

OTO JAK DZIAŁA CHECKER (UZASADNIENIE TEZY T6 Z DELTY 10):  
PO PIERWSZE: DOLACZA ZAPRZECZENIE WNIOSKU DO PRZESŁANEK ( CZYLI W TYM WYPADKU C=E - DO ZDAN Z5:NOT NWCX,EJ I Z2:NWCX,CJ I PROBUJE Z TEGO UDOWODNIC SPRZECZNOŚĆ. SPRAWDZA WIEC, CZY WSROD ZDAN NOT NWCX,EJ, NWCX,CJ, C=E

SA ZDANIA SPRZECZNE.  
PO DRUGIE: WYKORZYSTUJĄC, ŻE C=E WYMIENIA WSZEDZIE C NA E,TO ZNACZY OTRZYMUJE:

```
NOT NWCX,EJ, NWCX,EJ.
WIDAC, ŻE DWA OSTATNIE ZDANIA SA SPRZECZNE (JEDNO JEST NEGACJA DRUGIEGO).
A ZATEM DOLACZENIE ZAPRZECZENIA WNIOSKU ( CZYLI E=C ) DO PRZESŁANEK
PROWADZI DO SPRZECZNOŚCI. WNIOSEK Z TEGO, ŻE C NIE MOŻE BYĆ RÓWNE E,
A ZATEM WNIOSEK OSTATECZNY: NOT C=E.
```

WAŻNA UWAGA: STRUKTURA DOWODU W MIZARZE WYMAGA, ABY KOLEJNOŚĆ ARGUMENTÓW W KONKLUZJI BYŁA TAKĄ SAMĄ JAK W DOWODZONYM TWIERDZENIU.

OTO POPRAWNY DOWÓD TEZY T10, O PODANIE KTÓREGO PROSIŁO KILKU CZYTELNIKÓW:

```
T10:FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NOT NWCX,ZJ & NWCY,ZJ
HOLDS NOT NWCX,YJ
```

```
PROOF
LET X*,Y*,Z* BE ULAMEK SUCH THAT A:NOT NWCX*,Z*J AND
B:NWCY*,Z*J;
C:X(<)Y* BY B,A;
D:NWCX*,Z*J BY A,SPOJNOSC;
E:NWCY*,Z*J BY B,D,PRZECZODNIOSC;
THUS NOT NWCX*,Y*J BY C,E,ANTYSYMETRIA
END;
```

ORAZ TEŻ T13:

```
T13: FOR X,Y BEING ULAMEK ST NWCX,YJ HOLDS
FOR Z BEING ULAMEK HOLDS
NWCX,ZJ OR NWCZ,YJ
PROOF
LET X*,Y* BE ULAMEK SUCH THAT 1: NWCX*,Y*J;
LET Z* BE ULAMEK;
ASSUME THAT 11: NOT NWCX*,Z*J AND 111: NOT NWCZ*,Y*J;
2: NWCX*,Z*J BY 11,SPOJNOSC;
22: NWCZ*,Y*J BY 11,2,PRZECZODNIOSC;
THUS CONTRADICTION BY 22,111;
END;
```

TRUDNO NIE PRACUJĄC BEZPOŚREDNIO Z KOMPUTEREM, NAPISAĆ CALKOWICIE POPRAWNY DOWÓD I DLATEGO TEŻ CZYTELNICY, KTÓRZY PO OTRZYMANIU WYDRUKU Z BŁEDNYM ROZWIĄZANIEM PRZYSŁA POPRAWIONY TEKST, OTRZYMAJĄ NOWY WYDRUK.  
BŁĘDY WYNTKAJĄCE Z ZAGAPIENIA SIĘ STARAMY SIĘ POPRAWIAĆ SAHI. PRZY INNYCH, POWAŻNIEJSZYCH BŁĘDACH PISZEMY KOMENTARZ ZACZYNAJĄCY SIĘ OD "==".

ZINAIDA TRYBULEC