Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 9/1983

Marian Roman	- Ełk	47,88pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	47,34pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	45,11pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	44,73pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	43,51pkt
Małgorzata Czerniakowska	- Gdańsk	39,71pkt
Marek Prauza	- Poraj	39,48pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt

Współczynniki trudności zadań:

61 - 2,55   62 - 2,86   63 - 1,84

Owocna okazała się ostatnia kolejka ligowa. Aż czterech uczestników konkursu efektownym rzutem na taśmę przekroczyło limit 44: panowie Roman i Pawłowski po raz pierwszy, panowie Kamiński i Gałecki już po raz drugi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1 Ocenę mnożymy przez

$$4-3\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 76, 77, 78

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1984

76. Na płaszczyźnie dany jest kwadrat o boku a. Poprowadzić dwie proste równoległe tak, by odległość między nimi była równa zadanej liczbie $d \leqslant a$ oraz by część kwadratu, zawarta między tymi prostymi, miała możliwie największe pole. Obliczyć to maksymalne pole.

77. Jaka jest największa liczba części, na które 20 okręgów może podzielić sferę?

78. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{1\cdot(n-1)}+\frac{1}{2\cdot(n-2)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot 1}=\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Zadanie 78 przysłał nasz Czytelnik, pan Krzysztof Trautman z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 10/1983

Przypominamy treść zadań:

64. Przedstawić liczbę 10^6 w postaci sumy skończenie wielu liczb dodatnich tak, by ich iloczyn był możliwie największy.

65. Czy można podzielić sześcian na skończoną liczbę sześcianów różnej wielkości?

66. Wyznaczyć największą liczbę naturalną, która ma wszystkie cyfry różne i która dzieli się przez każdą ze swych cyfr.

64. Dla ustalonej wartości $n \in N$ rozkład liczby $a > 0$ na sumę n składników ($a = x_1 + \ldots + x_n$, $x_i > 0$) jest optymalny ($\Pi x_i = \max$), gdy wszystkie x_i są równe ($x_i = a/n$); wynika to z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną. Iloczyn Πx_i równa się wtedy $(a/n)^n$. Należy teraz zmaksymalizować tę wielkość przy zmiennym n. Badając znak pochodnej funkcji $f(t) = (a/t)^t = \exp(t\ln(a/t))$ w przedziale $1 \leqslant t < \infty$ stwierdzamy, że funkcja ta rośnie w przedziale $1 \leqslant t \leqslant a/\mathrm{e}$, a maleje w przedziale $a/\mathrm{e} \leqslant t < \infty$. Nas interesuje maksimum $f(n)$ po $n \in N$. Może ono być osiągnięte tylko dla n równego jednej z dwóch liczb naturalnych sąsiadujących z a/e. Dla $a = 10^6$ są to liczby $m = 367879$ i $m+1$. Pozostaje stwierdzić, co jest większe: $f(m)$ czy $f(m+1)$. Przy użyciu zwykłych czterocyfrowych tablic logarytmów nie jesteśmy w stanie rozróżnić tych liczb. Dysponując znacznie dokładniejszymi tablicami lub maszyną cyfrową można problem rozstrzygnąć bez trudu. Pokażemy jednak, jak to można zrobić bez „sztucznych ułatwień". Skorzystamy z nierówności

$$\mathrm{e}^x > 1+x \quad \text{dla } x \neq 0, \qquad \ln(1+x) > x-\frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x > 0.$$

(Wynikają one natychmiast z rozwinięć funkcji wykładniczej i logarytmicznej w szeregi potęgowe; można też je łatwo udowodnić badając znak pochodnej różnicy lewej i prawej strony). Obliczamy:

$$\frac{f(m)}{f(m+1)} = \left(\frac{a}{m}\right)^m : \left(\frac{a}{m+1}\right)^{m+1} = \frac{m+1}{a}\left(\frac{m+1}{m}\right)^m =$$

$$= \frac{m+1}{a}\exp\left(m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) > \frac{m+1}{a}\exp\left(m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{m+1}{a}\cdot\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1/2m} > \frac{\mathrm{e}}{a}(m+1)\left(1-\frac{1}{2m}\right) >$$

$$> \frac{\mathrm{e}}{a}\left(m+\frac{1}{2}\right) = 10^{-6}\cdot\mathrm{e}\cdot 367879{,}5 >$$

$$> 0{,}3678795\cdot 2{,}7182818 = 1{,}0000001494431 > 1.$$

A zatem optymalny jest rozkład liczby $a = 10^6$ na $m = 367879$ równych składników.

65. Lemat. Przy dowolnym podziale kwadratu na skończoną liczbę kwadratów różnej wielkości najmniejszy z nich zawiera się wraz z brzegiem we wnętrzu dużego kwadratu. (Łatwy dowód lematu pomijamy).

Przypuśćmy, że istnieje podział sześcianu K na sześciany różnej wielkości. Wybierzmy jedną ze ścian K, nazwijmy ją ścianą dolną; stojące na niej sześciany dzielą ją na kwadraty. Z lematu wynika, że najmniejszy z tych sześcianów — nazwijmy go K_1 — jest ze wszystkich bocznych stron otoczony przez sześciany większe. Zatem sześciany stojące na górnej ścianie sześcianu K_1 dzielą ją na kwadraty. Najmniejszy z tych sześcianików — nazwijmy go K_2 — znów musi być z czterech bocznych stron otoczony przez sześciany większe od niego. Rozumowanie to można powtórzyć nieskończenie wiele razy, wbrew temu, że wszystkich sześcianów jest skończenie wiele. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rozważany podział nie istnieje.

66. Każda nieparzysta liczba o omawianej własności składa się z samych cyfr nieparzystych — jest więc co najwyżej pięciocyfrowa. Zatem jeśli istnieje większa taka liczba, to musi być parzysta; wśród jej cyfr nie wystąpi 0 (to oczywiste) ani 5 (piątka musiałaby być na końcu — wbrew parzystości). Liczba utworzona ze wszystkich pozostałych ośmiu cyfr nie dzieli się przez 3 (suma cyfr 40). Stąd wniosek, że poszukiwana liczba jest co najwyżej siedmiocyfrowa; a jeśli jest siedmiocyfrowa, to musi składać się z cyfr 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 (tylko ten zestaw daje podzielność przez 3, 6 i 9). Ponieważ szukamy liczby możliwie największej, sprawdzamy, czy liczba postaci 987*abcd*, której czterocyfrowa końcówka jest permutacją układu cyfr 1236, może czynić zadość warunkowi zadania. Tylko cztery takie końcówki dają podzielność przez 8; przy żadnej z nich nie uzyskuje się podzielności przez 7. Przeprowadzamy kolejną próbę, z trzema początkowymi cyframi 986 : z cyfr 1, 2, 3, 7 można utworzyć dwie czterocyfrowe końcówki podzielne przez 8, a to 3712 i 7312. Liczba 9867312 dzieli się przy tym przez 7 — jest więc liczbą szukaną.

W sprawie „paradoksu" ekonomicznego

W *Delcie* 6/1983 dr Andrzej Pelc opisał sytuację, gdzie zwiększenie ceny produktu wywołuje ... zwiększony nań popyt. Przykład jest ładny — lecz sztuczny (tylko dwa produkty, wybrane funkcje celu, tylko dwie cechy produktów) — ale nie o to chodzi; gdyby przykład nie był sztuczny, nie byłoby paradoksu.

(Gdyby sytuacje takie zdarzały się w rzeczywistości, bylibyśmy do nich przyzwyczajeni — i nie nazywalibyśmy ich paradoksem. Gdyby w geometrii pola dwóch części powierzchni nie sumowały się do pola całości, paradoksalnym nazwalibyśmy taki podział sfery, w którym pola obu części dają w sumie akurat pole sfery!)

Przykład jest elegancki — ale statyczny. Ja natomiast zajmuję się cybernetyką, gdzie nie są ważne liczby, lecz kierunek i wzajemna współzależność zmian. W słynnym przykładzie lisów i zajęcy nie jest ważne, ile jest jednych i drugich. Ważne, że wymieranie lisów powoduje rozradzanie się zajęcy, od czego rozradzają się lisy itd. Jeśli proces jest oscylacyjny i nie rozbieżny, cybernetyk odchodzi uspokojony, liczenie zajęcy pozostawiając Księciu-Panu z Jičina.

Pomyślmy teraz o jajach i mleku. Niech istotnie — jak w przykładzie dra Pelca — podniesienie ceny mleka (gdzie kaloria jest tania) spowoduje ograniczenie spożycia droższych jaj, a wzmożone popijanie mleka. Co się stanie?

Wzmożony popyt na mleko spowoduje dalsze podnoszenie się jego ceny — a zatem tym większe jego spożycie — a zatem tym wyższą cenę ... Jest to typowe sprzężenie zwrotne dodatnie. Układ taki jest niestabilny — i trwać nie może.

Jak ten proces się zakończy? Wyrównaniem cen kalorii w mleku i w jajku i wówczas paradoks przestanie działać. Nastąpi to bardzo szybko — tym szybciej, że jednocześnie spadać będą ceny nie kupowanych jaj! Po kilku dniach nawet w mleczno-jajecznym kraju byłoby po paradoksie. Dlatego właśnie reguła podaży i popytu jest *prawem* — a skonstruowana sytuacja *paradoksem*. Jeśli nawet wystąpi, to w praktyce jej nie zauważymy.

Powstaje pytanie: czy nie można utrzymać paradoksu ustalając podwyższoną cenę mleka — i nie dopuszczając do jej dalszej zwyżki? W statycznym przykładzie — tak, w życiu — nie! Za tańsze, niż określa to podaż i popyt, mleko, musimy też płacić.

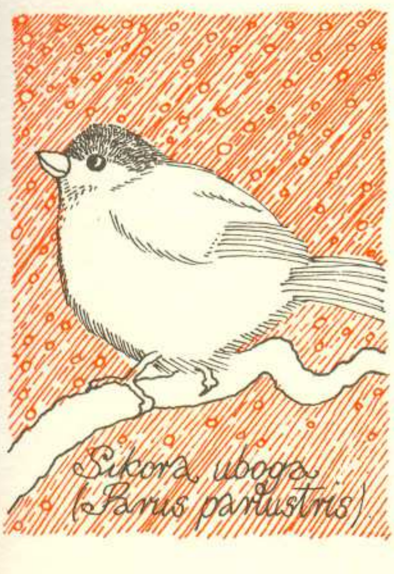
Płacimy swoim czasem w kolejkach! W szalonym okresie 1978—1982, gdy rządziła obłędna pseudo-ekonomia, rynkowa cena szynki dochodziła do np. 500 zł — a w sklepach sprzedawano ją po 200 (ograniczając ilość na głowę). W warunkach wielkomiejskich (otwarty „rynek" klientów) przeciętny czas czekania w kolejce razy średnia wartość godziny ludzkiego czasu równy był różnicy ceny rynkowej i oficjalnej razy dopuszczalna liczba kupowanych kilogramów. Gdy kierownik sklepu ograniczał tę liczbę np. dwukrotnie — kolejka też dwukrotnie malała!

$$T \cdot W = (C - c) \cdot m,$$

gdzie: T — średni czas dojścia do lady z szynką (w godzinach),
W — wartość (średnia) czasu kupującego (w zł/godz.),
C — cena szynki na rynku (w zł/kg),
c — oficjalna taryfa pobierana w sklepie (w zł/kg),
m — ilość szynki dopuszczana do jednorazowego nabycia (w kg).

Jako pożyteczne ćwiczenie domowe polecam analogiczne obliczenia dziś, gdyż — wbrew zapowiedziom prof. Zdzisława Krasińskiego — min. Zdzisław Krasiński nie wprowadził, jak dotąd, cen rynkowych. Mamy więc pole do badań naukowych!

mgr Janusz ***KORWIN-MIKKE***



Autor powyższego listu przedstawia mechanizmy wolnorynkowe jako uniwersalny przyrząd do likwidowania paradoksów ekonomicznych. Odnosi się jednak wrażenie, że sam nie bardzo wierzy w praktyczną i teoretyczną przydatność tego przyrządu. Jak każdy, kto sprawie się przyjrzy bliżej, od ekonomii w stylu Smitha przechodzi on, w drugiej części listu, do ekonomii raczej z „Kapitału" i jako równoważny do pieniądza wprowadza czas. Idąc konsekwentnie tą drogą należy dalej wprowadzić siły społeczne i ich emanację — struktury ekonomiczne i państwowe. W efekcie daje to (w dotyczącym nas bezpośrednio przykładzie) ceny regulowane. Takich zresztą cen dotyczył nasz paradoks (co wyraźnie napisaliśmy).

I jeszcze dwie uwagi. Ceny rynkowe dałyby u nas, że zacytujemy, „po kilku dniach" usunięcie z rynku towarów przez dysponujących znacznymi zapasami środków płatniczych i biologiczną zagładę pozostałych. I druga uwaga. Paradoks to niezgodność ze stereotypem myślenia, a w naszym kraju stereotyp myślenia o ekonomii wcale nie bierze się z przyzwyczajenia. Bowiem w ogóle do ekonomii przyzwyczajeni nie jesteśmy.

Redakcja