wiązka wektorowa na zespolonej prostej rzutowej (czy też: na sferze Riemanna) jest wyznaczona przez jedną macierz o współczynnikach będących funkcjami holomorficznymi przy $z \neq 0$ i $z \neq \infty$. Musimy jeszcze zanalizować, kiedy różne funkcje przejścia dają tę samą wiązkę. Twierdzenie będące tematem artykułu powiada bowiem, że dla każdej n-wymiarowej wiązki można znaleźć funkcje przejścia postaci (⁑). Otóż, jak łatwo zrozumieć, dwa wybory funkcji przejścia G_{ij} oraz G'_{ij} dają tę samą wiązkę, gdy na każdym U_i da się zgodnie zmienić układ współrzędnych w każdym włóknie $F \stackrel{*}{=} C^n$ tak, by jeden „nabór" funkcji przejścia przeszedł na drugi. Sposób zmiany ma ponadto zależeć holomorficznie od współrzędnej u na prostej rzutowej. Korzystając z jednego z podstawowych faktów algebry liniowej (o zmianie macierzy przekształcenia przy zmianie układu współrzędnych) dochodzimy do takiego wniosku:

twierdzenie Grothendiecka jest równoważne stwierdzeniu, że dla każdej macierzy (g_{ij}) o współczynnikach holomorficznych poza zerem i nieskończonością istnieją macierze (G_{ij}) i (G'_{ij}) takie, że

$$(G_{ij}) \cdot (g_{ij}) \cdot (G'_{ij})$$

jest macierzą postaci

$$\begin{pmatrix} u^{k_1} & & & 0 \\ & u^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u^{k_n} \end{pmatrix},$$

przy czym G_{ij} są funkcjami holomorficznymi dla $z \neq \infty$, a G'_{ij} — holomorficznymi przy $z \neq 0$. I w prawie takiej postaci twierdzenie nasze pojawiło się u Birkhoffa w 1913 roku.

Nie napiszemy już, dlaczego twierdzenie Dedekinda-Webera wyraża to samo, co twierdzenie Birkhoffa (jeżeli tylko ograniczyć się do nieco węższego przypadku algebraicznego). Musielibyśmy bowiem znacznie wydłużyć artykuł wprowadzając Czytelnika w podstawy współczesnej (tak jest: współczesnej) geometrii algebraicznej. Warto jednak zdać sobie sprawę z co najmniej dwóch faktów. Pojęcie wiązki wektorowej zostało wprowadzone w późnych latach czterdziestych, no, może wczesnych pięćdziesiątych, XX wieku. Pokazaliśmy jednak, jak związane jest ono z bardziej „konkretnymi" pojęciami matematyki. Redukcja sformułowania z początku artykułu do przytoczonego przed chwilą twierdzenia Birkhoffa odbyła się na tej samej drodze, jaką szedł rozwój dyscypliny. W tym artykule opisaliśmy tę drogę w przeciwnym kierunku: od rzeczy znanych nam dzisiaj do sposobu patrzenia na te same rzeczy dawniej.

I druga uwaga. Zarówno Dedekind i Weber, jak i Birkhoff zdawali sobie sprawę, że ich twierdzenie jest „ważne" i że ma i będzie miało wiele zastosowań i uogólnień. I rzeczywiście od około dziesięciu lat holomorficzne wiązki wektorowe badają równie dobrze matematycy, jak i fizycy przenosząc twierdzenie Grothendiecka na ogólniejsze przestrzenie oraz stosując wyniki we współczesnych teoriach fizycznych. Doprawdy, wszystko już było...

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 352. Z czwórki a_1, b_1, c_1, d_1 liczb naturalnych tworzymy nową czwórkę $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$. Wykazać, że powtarzając tę operację dojdziemy po pewnym czasie do czwórki $(a_n, b_n, c_n, d_n) = (0, 0, 0, 0)$.
Rozwiązanie na str. 2

M 353. Trójkąt ABC leży wewnątrz równoległoboku $KLMN$. Wykazać, że $S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} S_{KLMN}$.
Rozwiązanie na str. 3

M 354. W kwadracie o boku 1 wybrano 201 punktów tak, że żadne trzy spośród nich nie są współliniowe. Wykazać, że znajdą się wśród nich trzy wierzchołki trójkąta o polu nie większym od $\frac{1}{200}$.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 146. Sportowiec na nartach wodnych może poruszać się szybciej niż ciągnąca go motorówka. Jak to wyjaśnić?
Rozwiązanie na str. 7

F 147. Obserwując holowanie jednostek pływających (np. ciągnięcie łodzi przez motorówkę) można zauważyć, że lina holownicza napina się jedynie chwilami, na ogół zaś zwisa. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 2