Wszystko już było

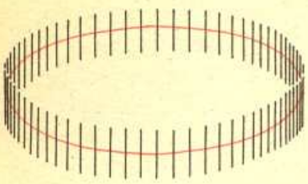
Dr Michał SZUREK

Bezpośrednią przyczyną napisania tego artykułu stał się następujący fragment wydanej w 1981 r. książki „Wiązki wektorowe na zespolonych przestrzeniach rzutowych" trzech niemieckich autorów:

Twierdzenie Grothendiecka o rozszczepianiu ma długą historię. Jest faktycznie równoważne z twierdzeniem o holomorficznych macierzach odwracalnych, co zauważył Seshadri (1957). Takie zaś twierdzenie było udowodnione przez Birkhoffa w 1913 r., ale naprawdę było już znane Plemeljowi w 1908 r. i Hilbertowi w 1905. W. D. Geyer zauważył, że Dedekind i Weber udowodnili je — w algebraicznej wersji — w 1882 r. W tej formie może też być znalezione w „Teorii liczb" Hassego jako lemat Witta.

Wspomniane twierdzenie Grothendiecka pochodzi z 1956 r. i należy już do klasyki geometrii algebraicznej i geometrii przestrzeni analitycznych. Głosi, że każda wiązka holomorficzna wektorowa na zespolonej prostej rzutowej (= sferze Riemanna) jest sumą prostą wiązek jednowymiarowych. Postaram się dalej wytłumaczyć sens nagromadzonych terminów. Aleksander Grothendieck należy do tytanów nowoczesnej matematyki, a jego działalność wpłynęła w rewolucyjny sposób na kilka dyscyplin tej nauki. Z drugiej zaś strony wspomniana praca Dedekinda i Webera z 1882 roku to słynna stustronicowa „Teoria funkcji algebraicznych jednej zmiennej". Zawarte tam są nowożytne podstawy co najmniej trzech gałęzi matematyki: algebraicznej teorii liczb, geometrii algebraicznej i algebry abstrakcyjnej. Przeglądając ją dzisiaj dziwimy się, że warto było pisać o rzeczach tak dobrze znanych.
Czy możliwe jest jednak, że odkrycie genialnego Grothendiecka ma w gruncie rzeczy sto lat? Udało mi się dotrzeć do źródeł: cytowanych prac Birkhoffa i Dedekinda z Weberem. Birkhoff formułuje twierdzenie prawie tak, jak my tutaj (w końcowej części artykułu), ale przedtem pisze:

Doszedłem wpierw do twierdzenia stanowiącego uogólnienie twierdzenia o rozkładzie funkcji na szereg Laurenta poprzez badanie punktów osobliwych równań różniczkowych zwyczajnych. Niniejszy artykuł zawiera kompletną postać twierdzenia, a dowód oparty jest na teorii równań całkowych Fredholma. Wydaje się, że twierdzenie jest samo w sobie ciekawe niezależnie od zastosowań, jakie ma w teorii równań różniczkowych liniowych zwyczajnych. Podam je w następnym artykule następującym bezpośrednio po tym.

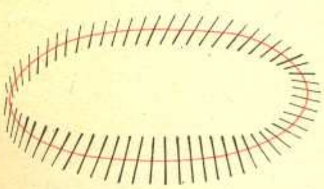


Rys. 1

Przeczytajmy jeszcze, co piszą Dedekind i Weber:

Wszystkie różniczki drugiego rzędu dadzą się przedstawić liniowo ze stałymi współczynnikami poprzez p odpowiednio wybranych różniczek drugiego rzędu, przez różniczki pierwszego rzędu i różniczki właściwe.

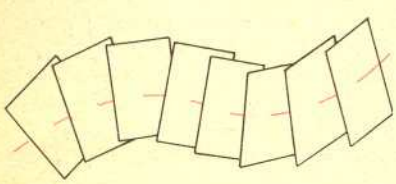
Dla specjalisty jest oczywiste, że jest to tylko inne sformułowanie twierdzenia Grothendiecka cytowanego na początku i twierdzenia Birkoffa, które będzie sformułowane dalej. Wprawdzie twierdzenie Dedekinda i Webera dotyczy tylko różniczek (= wiązek) algebraicznych drugiego rzędu, ale za to na dowolnej powierzchni Riemanna (dla prostej rzutowej niezmiennik p wynosi 0), nadto użyta metoda jest ogólna — widocznie autorzy nie czuli potrzeby badania wyższych różniczek.



Rys. 2

Czy więc „wszystko już było"? Tak, tu zdecydowanie tak.

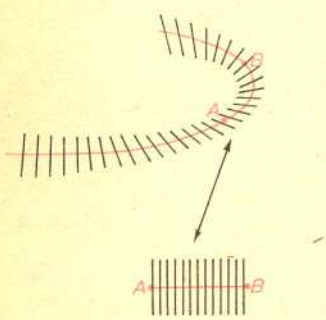
Postarajmy się teraz wniknąć w treść twierdzenia Dedekinda-Webera-Birkhoffa-Grothendiecka, mamy prawo je tak nazwać, prawda? Wyjaśnimy najpierw pojęcie wiązki. Wyobraźmy sobie, że do każdego punktu krzywej (dajmy na to, okręgu) doklejono odcinek „mniej więcej" prostopadle. Można to zrobić tak jak na rys. 1 otrzymując powierzchnię boczną walca. Mówimy, że powierzchnia boczna walca tworzy wiązkę trywialną nad okręgiem.
Ale odcinki możemy doklejać do okręgu jeszcze w inny sposób, przekręcając każdy z nich o pewien kąt tak, żeby po objechaniu okręgu dookoła doklejany odcinek obrócił się o 180°. Co dostaniemy? Znaną każdemu wstęgę Möbiusa (rys. 2). Zobaczyliśmy ją tu jako pewną wiązkę odcinków nad okręgiem. Moglibyśmy skręcać doklejane odcinki tak, by otrzymać „paski Möbiusa" skręcone o dowolny kąt $k \cdot 180°$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ — za każdym razem dostając inną wiązkę odcinków. Podobnie można sobie na przykład wyobrażać wiązkę płaszczyzn nad krzywą jako schody czy wachlarz (rys. 3).



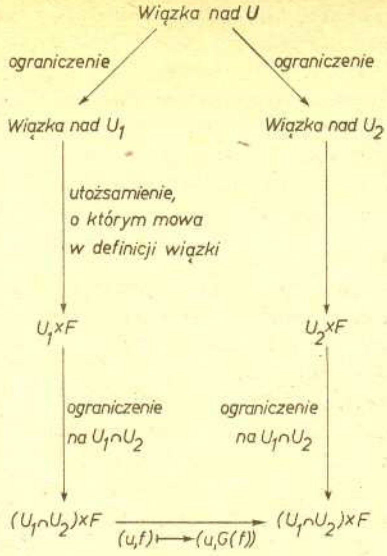
Rys. 3

To, co jest najbardziej istotne w pojęciu wiązki: nie różnią się one od siebie lokalnie. Każdy fragment wstęgi Möbiusa jest łatwo deformowalny do fragmentu powierzchni bocznej walca, ale cała wstęga do całej powierzchni walca już nie. W definicji wiązki żądamy właśnie, by „lokalnie" była ona powierzchnią boczną walca.

Precyzyjnie: by w otoczeniu U każdego punktu bazy X wiązka dawała się utożsamić z $U \times F$, gdzie F jest zbiorem wklejanym (zwanym włóknem wiązki). Wyjaśni to rysunek 4.
Włókno (wklejany zbiór) F decyduje oczywiście o typie wiązki. Dla walca i wstęgi Möbiusa był nim odcinek, dla schodów z rys. 3 płaszczyzna. Gdy F jest prostą, mówimy o wiązce liniowej, gdy przestrzenią wektorową n-wymiarową — o n-wymiarowej wiązce wektorowej. Ale bardziej istotnym czynnikiem klasyfikującym wiązki jest typ funkcji przejścia.



Rys. 4



$G: F \to F$ jest funkcją przejścia

Zbiory U, nad którymi wiązka jest już postaci $U \times F$, mogą na siebie zachodzić. Co się więc dzieje nad $U_1 \cap U_2$? Nad tą częścią wspólną mamy *dwa* utożsamienia — raz wiązkę utożsamiamy z kawałkiem $U_1 \times F$, drugi — z kawałkiem $U_2 \times F$, na części wspólnej te dwa utożsamienia *nie muszą* być takie same. Mogą się różnić — właśnie o funkcję przejścia. Można to zobrazować diagramem.

Funkcja przejścia G działa więc na włóknie F transformując je w pewien sposób. „Poglądowo" można powiedzieć, że w punkcie $x \in U_1 \cap U_2$ stoi dwóch obserwatorów: jeden z kraju U_1, w którym panuje Reguła Utożsamiania Nr 1, drugi z kraju U_2, w którym obowiązuje Reguła Nr 2.
Funkcja przejścia $G: F \to F$ przelicza „obserwacje" z układu „U_1" na „U_2", tłumaczy jednemu z nich to, co mówi drugi.

Takie funkcje przejścia muszą być związane z każdą parą zbiorów U, nad którymi wiązka jest trywialna — jeżeli tylko zbiory te mają niepustą część wspólną; mamy więc do czynienia z całą kolekcją funkcji przejścia G_{ij}, wszystkie działają z F do F, a konkretne G_{ij} wiąże lokalne sklejenie wiązki z $U_i \times F$ z jej lokalnym sklejeniem z $U_j \times F$. Oczywiście $G_{ij} = G_{ji}^{-1}$ oraz

$$(*) \qquad G_{jk} \cdot G_{ij} = G_{ik}$$

dla wszystkich wskaźników i, j, k, dla których $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Ta ostatnia równość stwierdza bowiem, że przejście od układu współrzędnych na U_i do układu współrzędnych na U_j, a potem na U_k da się zastąpić przez proste przejście z U_i na U_k.

Funkcje przejścia G_{ij} mogą być różne nad różnymi punktami u bazy, tj. przestrzeni, nad którą określona jest wiązka. Możemy napisać: $G_{ij} = G_{ij}(u)$, $u \in U_i \cap U_j$. I właśnie w zależności od tego, jakiej klasy, jakiego typu są funkcje

$$u \to G_{ij}(u),$$

mamy różne typy wiązek; ciągłe (= topologiczne), gdy są to funkcje ciągłe, różniczkowalne — gdy G_{ij} są różniczkowalne względem u, holomorficzne (= analityczne), algebraiczne itd. Reasumując, z naszych określeń wynika, że wiązka jest podana (określona), gdy

1) podane jest włókno F i zbiory U_i, na których wiązka ma być postaci $U_i \times F$,

2) wybrane są funkcje przejścia $G_{ij}: F \to F$, gdzie i, j są takie, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Jak już powiedzieliśmy, wiązka nazywa się *wektorowa* (rzeczywista czy zespolona), jeżeli F jest przestrzenią R^n czy C^n. Funkcjami przejścia takich wiązek są funkcje liniowe $R^n \to R^n$ czy $C^n \to C^n$, na które można patrzeć jak na macierze (por. uwaga na marginesie).

Jak zwykle wiążemy tu z przekształceniem liniowym

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

jego macierz (tablicę współczynników)

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie Grothendiecka dotyczy, jak widzieliśmy, wiązek holomorficznych na zespolonej prostej rzutowej P^1 i stwierdza, że każda taka wiązka jest sumą prostą wiązek jednowymiarowych (liniowych). Nie tłumacząc dokładnie pojęcia sumy prostej wiązek pokażemy tylko, jakie funkcje przejścia ma wiązka będąca sumą prostą wiązek jednowymiarowych (zgodnie z 1) i 2) wyżej nasze określenie może być potraktowane jako definicja).

Otóż funkcje przejścia takiej wiązki mogą być wybrane w postaci

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} g^1_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g^2_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g^n_{ij} \end{pmatrix},$$

gdzie $(g^1_{ij}), (g^2_{ij}), \dots, (g^n_{ij})$ są funkcjami przejścia wiązek jednowymiarowych, a więc niezerowymi przekształceniami liniowymi $C \to C$.
Takie przekształcenia są postaci $z \to az$, gdzie $a \in C$ jest niezerową liczbą zespoloną. Jak widzieliśmy $G_{ij} = G_{ij}(u)$, zatem także $a = a(u)$.
A więc — wyjaśnia twierdzenie Grothendiecka — dla każdej wiązki holomorficznej na prostej rzutowej można wybrać funkcje przejścia będące możliwie najprostszej postaci

$$(\overset{*}{*}) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

gdzie wielkości $a_1, a_2, \dots, a_n$ zależą (holomorficznie) tylko od współrzędnej u prostej rzutowej.

W naszych coraz bardziej skomplikowanych rozważaniach możemy poczynić jedno uproszczenie. Określając holomorficzne wiązki wektorowe na prostej rzutowej możemy użyć tylko dwóch zbiorów otwartych U_1 i U_2, pierwszy z nich złożony z wszystkich punktów właściwych ($u \neq \infty$), drugi z punktów $u \neq 0$, za to wraz z $u = \infty$. Do określenia wiązki wystarczy wtedy jedna macierz, bo warunek (*) dotyczy trzech zbiorów. Moglibyśmy skrócić artykuł nie wspominając w ogóle o (*), stracilibyśmy jednak pewną perspektywę. W każdym jednak razie holomorficzna

wiązka wektorowa na zespolonej prostej rzutowej (czy też: na sferze Riemanna) jest wyznaczona przez jedną macierz o współczynnikach będących funkcjami holomorficznymi przy $z \neq 0$ i $z \neq \infty$. Musimy jeszcze zanalizować, kiedy różne funkcje przejścia dają tę samą wiązkę. Twierdzenie będące tematem artykułu powiada bowiem, że dla każdej n-wymiarowej wiązki można znaleźć funkcje przejścia postaci (⁑). Otóż, jak łatwo zrozumieć, dwa wybory funkcji przejścia G_{ij} oraz G'_{ij} dają tę samą wiązkę, gdy na każdym U_i da się zgodnie zmienić układ współrzędnych w każdym włóknie $F \stackrel{*}{=} C^n$ tak, by jeden „nabór" funkcji przejścia przeszedł na drugi. Sposób zmiany ma ponadto zależeć holomorficznie od współrzędnej u na prostej rzutowej. Korzystając z jednego z podstawowych faktów algebry liniowej (o zmianie macierzy przekształcenia przy zmianie układu współrzędnych) dochodzimy do takiego wniosku:

twierdzenie Grothendiecka jest równoważne stwierdzeniu, że dla każdej macierzy (g_{ij}) o współczynnikach holomorficznych poza zerem i nieskończonością istnieją macierze (G_{ij}) i (G'_{ij}) takie, że

$$(G_{ij}) \cdot (g_{ij}) \cdot (G'_{ij})$$

jest macierzą postaci

$$\begin{pmatrix} u^{k_1} & & & 0 \\ & u^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u^{k_n} \end{pmatrix},$$

przy czym G_{ij} są funkcjami holomorficznymi dla $z \neq \infty$, a G'_{ij} — holomorficznymi przy $z \neq 0$. I w prawie takiej postaci twierdzenie nasze pojawiło się u Birkhoffa w 1913 roku.

Nie napiszemy już, dlaczego twierdzenie Dedekinda-Webera wyraża to samo, co twierdzenie Birkhoffa (jeżeli tylko ograniczyć się do nieco węższego przypadku algebraicznego). Musielibyśmy bowiem znacznie wydłużyć artykuł wprowadzając Czytelnika w podstawy współczesnej (tak jest: współczesnej) geometrii algebraicznej. Warto jednak zdać sobie sprawę z co najmniej dwóch faktów. Pojęcie wiązki wektorowej zostało wprowadzone w późnych latach czterdziestych, no, może wczesnych pięćdziesiątych, XX wieku. Pokazaliśmy jednak, jak związane jest ono z bardziej „konkretnymi" pojęciami matematyki. Redukcja sformułowania z początku artykułu do przytoczonego przed chwilą twierdzenia Birkhoffa odbyła się na tej samej drodze, jaką szedł rozwój dyscypliny. W tym artykule opisaliśmy tę drogę w przeciwnym kierunku: od rzeczy znanych nam dzisiaj do sposobu patrzenia na te same rzeczy dawniej.

I druga uwaga. Zarówno Dedekind i Weber, jak i Birkhoff zdawali sobie sprawę, że ich twierdzenie jest „ważne" i że ma i będzie miało wiele zastosowań i uogólnień. I rzeczywiście od około dziesięciu lat holomorficzne wiązki wektorowe badają równie dobrze matematycy, jak i fizycy przenosząc twierdzenie Grothendiecka na ogólniejsze przestrzenie oraz stosując wyniki we współczesnych teoriach fizycznych. Doprawdy, wszystko już było...

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 352. Z czwórki a_1, b_1, c_1, d_1 liczb naturalnych tworzymy nową czwórkę $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$. Wykazać, że powtarzając tę operację dojdziemy po pewnym czasie do czwórki $(a_n, b_n, c_n, d_n) = (0, 0, 0, 0)$.
Rozwiązanie na str. 2

M 353. Trójkąt ABC leży wewnątrz równoległoboku $KLMN$. Wykazać, że $S_{ABC} \leq \frac{1}{2} S_{KLMN}$.
Rozwiązanie na str. 3

M 354. W kwadracie o boku 1 wybrano 201 punktów tak, że żadne trzy spośród nich nie są współliniowe. Wykazać, że znajdą się wśród nich trzy wierzchołki trójkąta o polu nie większym od $\frac{1}{200}$.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 146. Sportowiec na nartach wodnych może poruszać się szybciej niż ciągnąca go motorówka. Jak to wyjaśnić?
Rozwiązanie na str. 7

F 147. Obserwując holowanie jednostek pływających (np. ciągnięcie łodzi przez motorówkę) można zauważyć, że lina holownicza napina się jedynie chwilami, na ogół zaś zwisa. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 2